MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
SECRETARIAT GENERAL
DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PUBLIC et PRIVE
Service d'Appui au Baccalauréat

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION 2014

D

Série : D
Code matière : 009

Epreuve de : MATHEMATIQUES
Durée : 03 heures 15 minutes
Coefficients : 4

NB : - Les deux (02) exercices et le problème sont obligatoires.
- L'utilisation d'une calculatrice scientifique non programmable est autorisée.

EXERCICE 1 : (5 points)

Soit le polynôme P à variable complexe z défini par $P(z)=z^3-(5+i)z^2+(a+ib)z-8-16i$,
où *a* et *b* sont des nombres réels non nuls.

1) Déterminer les valeurs de *a* et *b* pour que *2i* soit une solution de l'équation $P(z)=0$. **(0,5pt)**

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation :

$$z^3-(5+i)z^2+(10+6i)z-8-16i=0.$$ **(1,5pt)**

3) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$ d'unité 1 cm,
on considère les points I, J, K et A d'affixes respectives : $z_I=2i$, $z_J=3+i$, $z_K=2-2i$,
$z_A=\sqrt{3}+i$

a) Placer les points I, J et K. A l'aide d'un compas et d'une règle non graduée, construire le point A. **(0,5pt)**

b) Démontrer que les droites (JI) et (JK) sont perpendiculaires. **(0,25pt)**

4) Soit B le point du plan tel que $z_B=\bar{z}_A$.

a) Calculer les distances OA , OB et AB. En déduire la nature du triangle AOB. **(1pt)**

b) Calculer l'affixe du point C pour que AOBC soit un losange. **(0,25pt)**

5) Soit S la similitude plane directe qui transforme B en C et laisse invariant le point O.
Déterminer l'expression complexe de S et préciser ses éléments caractéristiques. **(1pt)**

EXERCICE 2 : (5 points)

Une boîte contient six billets numérotés de 1 à 6.
On tire au hasard, successivement et sans remise deux billets de la boîte. On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

1. Chaque résultat est représenté par un couple (a ; b) de deux nombres distincts où a est le numéro apparu au premier tirage et b le numéro apparu au deuxième tirage.

   a) Démontrer qu'il y a 30 couples possibles. **(0,5pt)**

   b) Soit A, l'évènement : « Les deux numéros tirés sont pairs ».
   Calculer la probabilité de A. **(0,5pt)**

   c) Calculer la probabilité de l'évènement :
   B : « Obtenir au moins un numéro impair ». **(1pt)**

2. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque résultat, associe la différence entre le plus grand et le plus petit des deux nombres. Par exemple, pour les couples (3 ; 5) et (5 ; 3), la variable aléatoire X prend la valeur 5 - 3=2.

   a) Quelles sont les valeurs possibles de la variable aléatoire X ? **(1pt)**

   b) Calculer les probabilités : P(X=1) et P(X=3). **(0,5pt)**

   c) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X. **(1pt)**

   d) Calculer l'espérance mathématique et la variance de la variable aléatoire X. **(0,5pt)**

PROBLEME : **(10 points)**

On considère la fonction numérique f d'une variable réelle x définie sur $D_f =]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + \frac{2}{x}.$$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'unité 1 cm.

1) a) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. **(0,5pt)**

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{x}$ (poser x = X^2).En déduire que (C) admet une branche parabolique suivant (Ox) au voisinage de $+\infty$. **(0,75pt)**

2) On considère une deuxième fonction numérique g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = x\ln x - 2$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$. **(0,5pt)**

b) Etudier la variation de g, puis dresser son tableau de variation. **(1,5pts)**

c) Démontrer qu'il existe un nombre réel unique $\alpha \in]2\,;e[$ tel que $g(\alpha) = 0$. **(0,75pt)**

En déduire le signe $g(x)$. **(0,5pt)**

3) a) Démontrer que pour tout $x \in]0\,;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$. **(1pt)**

b) Dresser le tableau de variation de f. On prend $\alpha = 2{,}5$ et $f(\alpha) = 1{,}12$. **(1pt)**

4) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 1$. **(0,25pt)**

b) Tracer dans le même repère la droite (T) et la courbe (C). **(1,25pt)**

5) a) On donne $\displaystyle\int_\alpha^e \ln x\, dx = -\alpha\ln\alpha + \alpha$.

A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$\int_\alpha^e \tfrac{1}{2}(\ln x)^2\, dx = \frac{e}{2} - \frac{\alpha}{2}(\ln\alpha)^2 + \alpha\ln\alpha - \alpha.$$ **(1pt)**

b) Calculer, en fonction de α et en cm², l'aire géométrique $\mathcal{A}$ du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations :

$x = \alpha$ et $x = e$. **(0,5pt)**

c) Sachant que : $\alpha\ln\alpha = 2$, démontrer que $\mathcal{A} = \left(\dfrac{e}{2} + 4 - \dfrac{6}{\alpha} - \alpha\right)$ cm². **(0,5pt)**

* *