

\*\*\*\*\*

D

Série : D

Epreuve de : MATHEMATIQUES

Durée : 03 heures 15 minutes

Code matière : 009

Coefficients : 4

\*\*\*\*\*

**NB** : - Les deux (02) exercices et le problème sont obligatoires.  
- L'utilisation d'une calculatrice non programmable est autorisée.

**Exercice 1** (5 points)

Le plan complexe ( $\mathcal{P}$ ) est muni d'un repère orthonormé direct  $\mathcal{R} = (O; \vec{u}; \vec{v})$  d'unité 2cm.

1) P est le polynôme à variable complexe z défini par :

$$P(z) = z^3 - 2z^2 + (2+i)z - 1 - i$$

a) Calculer  $P(1)$  et  $(1-2i)^2$ .

(0,25+0,25pt)

b) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$ .

(1pt)

2) On considère les points A, B et C tels que  $z_A = 1$ ,  $z_B = 1-i$  et  $z_C = i$

Ecrire le nombre complexe  $a = \frac{z_B}{z_C}$  sous forme trigonométrique et en déduire  $a^4$ .

(1pt)

3) On considère la similitude plane directe S qui transforme M en M' telle que :

$$z' = (1-i)z + 2i; M' \text{ d'affixe } z' \text{ et } M \text{ d'affixe } z.$$

a) Déterminer les éléments caractéristiques de S.

1pt

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $S^4 = S \circ S \circ S \circ S$ .

(0,5pt)

c) Construire dans le même repère le triangle ABC et A'B'C' son image par  $S^4$ .

(1pt)

**Exercice 2** (5pts)

1) Les faces d'un dé cubique truqué sont numérotées : 1 ; 2 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6.

On lance une fois ce dé. Chaque face a la même probabilité d'apparition. On note  $P_i$  la probabilité d'apparition de la face portant le numéro i. Calculer  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_6$ .

(1,25pt)

2) On lance deux fois de suite ce dé. Chaque face a toujours la même probabilité d'apparition.

a) Calculer la probabilité de l'événement :

A : « la somme de deux numéros apparus sur la face supérieure est égale à 4 lors de deux lancements de ce dé ».

(0,75pt)

b) On note par X la variable aléatoire définie par la somme des numéros affichés lors de deux lancements de ce dé.

- Donner la loi de probabilité de X.

(0,75pt)

- Calculer l'espérance mathématique E(X).

(0,75pt)

3) On lance trois fois de suite et d'une manière indépendante ce dé. On note par Y la variable aléatoire égale au nombre d'apparitions de la face portant le numéro 2 lors de ces trois lancers.

a) Donner la loi de probabilité de Y.

(1pt)

b) Calculer la variance V(Y).

(0,5pt)

**N.B** : Mettre les résultats sous forme de fraction irréductible

...

**Problème** (10pts)

**N.B :** Les parties A et B sont indépendantes

**A.** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x e^{-x} + x - 1$ .

On note par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  d'unité 2cm.

- 1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = (1 - x)e^{-x} + 1$ 
  - a) Etudier le sens de variation de  $g$ . (1pt)
  - b) En déduire le signe de  $g(x)$ . (0,75pt)
- 2) Etudier les variations de  $f$ . (1pt)
- 3) a) Etudier la branche infinie de (C) au voisinage de  $-\infty$ . (0,5pt)  
c) Démontrer que (C) admet une asymptote oblique dont on précisera l'équation au voisinage de  $+\infty$  qu'on nommera (D). On précisera la position de (C) par rapport à (D). (0,75pt)
- 4) Démontrer qu'il existe un point unique A de (C) où la tangente (T) est parallèle à (D). (0,75pt)
- 5) Tracer dans le même repère (D), (T) et (C). (1,25pt)
- 6) Calculer en  $\text{cm}^2$ , l'aire géométrique du domaine plan limité par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ . (0,75pt)
- 7) a) Démontrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle J que l'on déterminera. (0,5pt)  
b) Calculer  $f(1)$  et  $(f^{-1})' \left( \frac{1}{e} \right)$  où  $f^{-1}$  est la fonction réciproque de  $f$ . (0,75pt)  
c) Tracer dans le même repère que (C) la courbe (C') de  $f^{-1}$ . (0,5pt)

(On donne :  $e = 2,7$  ;  $\frac{1}{e} = 0,4$ )

**B.** Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite définie par  $U_0 = 1$  et  $U_n = 1 - \int_0^n e^{-x} dx$

- 1) Calculer  $U_n$  en fonction de  $n$ . (0,75pt)
- 2) Démontrer que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique dont on précisera la raison. (0,75pt)

