

Exercices sur les circuits LC et RLC

Exercice 1

ELECTROMAGNETISME (4 pts)

Les parties A et B sont indépendantes.

- A- Un condensateur de capacité $C = 10 \mu\text{F}$, préalablement chargé par une tension continue de valeur $U_c = 10 \text{ V}$, est relié à une bobine de résistance négligeable et d'inductance $L = 0,1 \text{ H}$. A l'instant initial, la charge du condensateur est Q_0 ($Q_0 > 0$) et l'intensité du courant est nulle.

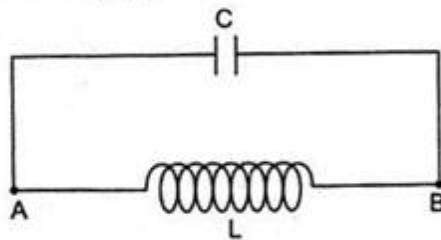


Figure 1

- 1) Etablir l'équation différentielle à laquelle obéit la charge q du condensateur. (1 pt)
- 2) Exprimer la charge q en fonction du temps t . (1 pt)

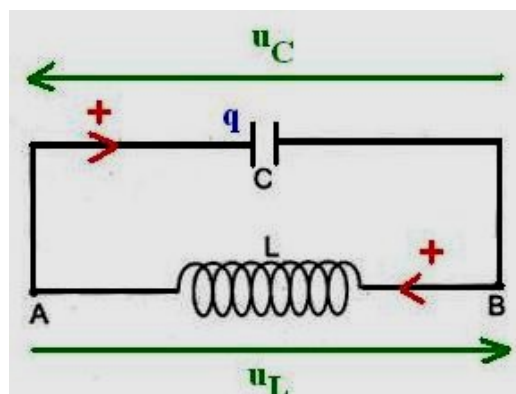
- B- On établit aux bornes d'un circuit RLC série une tension sinusoïdale de valeur efficace constante $U = 200 \text{ V}$. On fait varier la fréquence N . A chaque valeur de N correspond une intensité efficace I . On obtient le tableau suivant :

N(Hz)	400	500	600	700	780	800	900	1000
I(A)	0,75	1,5	2,8	4	2,8	2,5	0,75	0,5

- 1) Tracer la courbe de l'intensité $I = f(N)$. (0,5 pt)
- 2) En déduire le facteur de qualité Q . (0,5 pt)
- 3) Calculer les valeurs de R , L et C . (1 pt)

Correction 1

A-Orientons le circuit.



Désignons par q , la charge portée par l'armature du condensateur reliée au point A,
 ...par u_C et u_L respectivement, les tensions aux bornes du condensateur et de la bobine et fléchées
 comme l'indique la figure ci-dessus.

Avec ces conventions on a les relations suivantes:

$$i = \frac{dq}{dt} = \dot{q} \quad u_C = \frac{q}{C}; \quad u_L = L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \dot{i}$$

Et comme: $u_L + u_C = 0$ (loi des mailles)

$$\frac{q}{C} + L \cdot \ddot{q} = 0 \text{ soit: } \ddot{q} + \frac{1}{L \cdot C} q = 0$$

On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} = \frac{1}{\sqrt{0.1 \cdot 10 \cdot 10^{-6}}} = 1,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ et de période } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{L \cdot C} = 6,3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$$

2-La solution est du type: $q(t) = Q_m \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

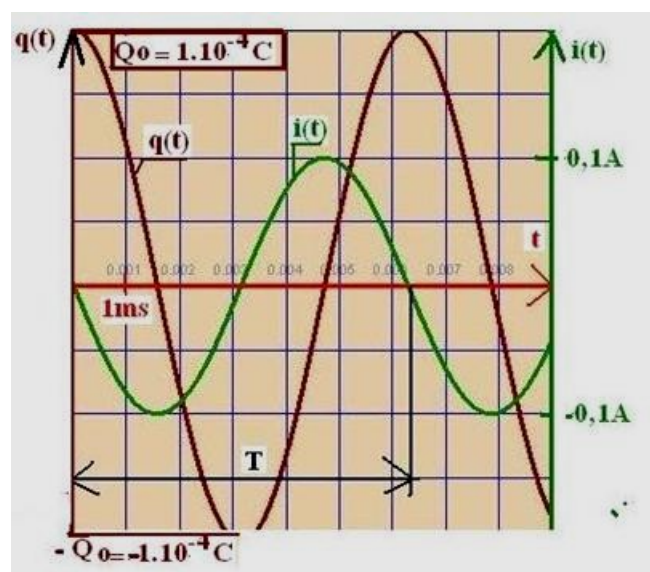
Avec les conditions initiales, à $t=0$, $q=Q_m=+Q_0$ et donc: $\cos\varphi = 1$; soit $\varphi = 0$

$$\text{Et } Q_0 = C \cdot U_C = 10 \cdot 10^{-6} \cdot 10 = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ C.}$$

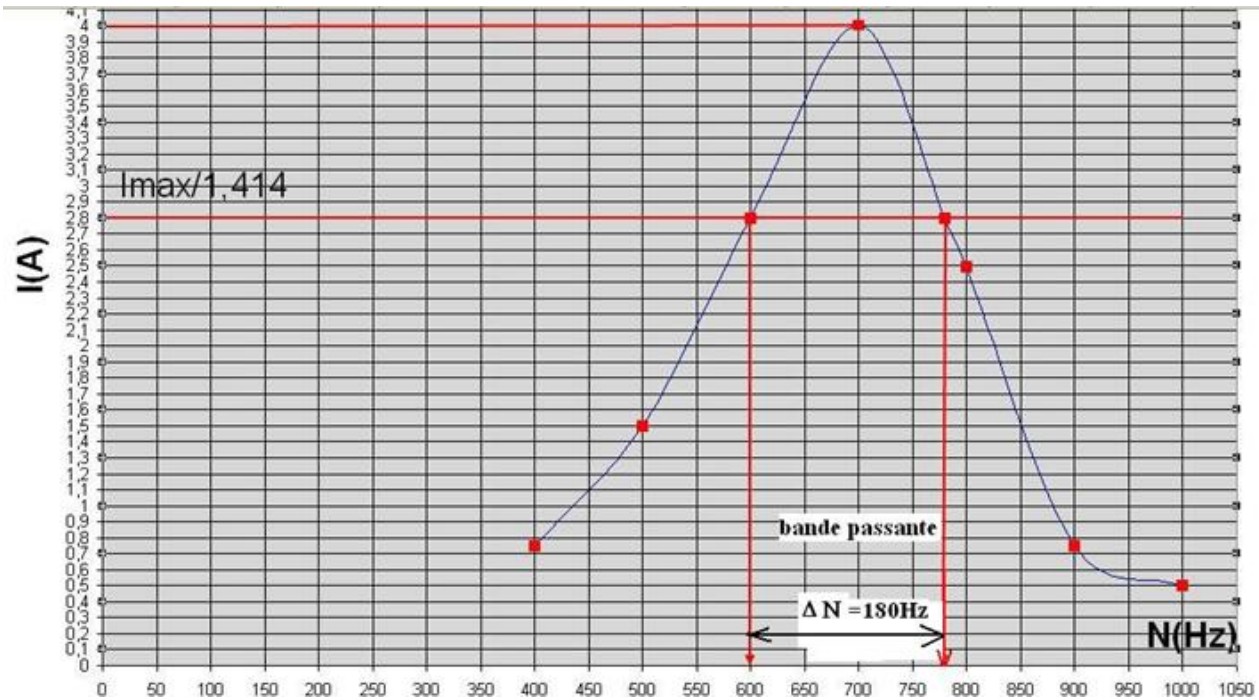
Soit:

$$q(t) = 1,0 \cdot 10^{-4} \cdot \cos 1,0 \cdot 10^3 \cdot t$$

On trace ci-dessous les graphes de $q(t)$ et de sa dérivée $i(t) = dq/dt = -Q_0 \omega \sin \omega t$



B-Traçons le graphe I=f(N):



Nous obtenons la courbe de réponse en intensité du circuit RLC

Pour $N=N_0=700\text{Hz}$, $I=I_{\text{max}}=4\text{A}$, c'est la résonance d'intensité.

Reportons sur le graphe les abscisses des points d'ordonnée:

$$\frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = 2.8\text{A}, \text{ nous obtenons les limites de la bande passante à 3dB}$$

$$\text{soit } N_1 = 600\text{Hz} \text{ et } N_2 = 780\text{Hz}$$

La largeur de la bande passante à 3dB est $\Delta N=780-600=180\text{ Hz}$

Le facteur de qualité est: $Q=N/\Delta N=700/180=3.9$

$R=U/I_{\text{max}}=200/4=50\Omega$.

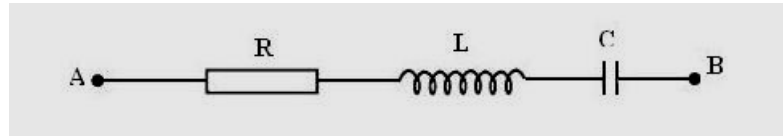
$$L = \frac{Q.R}{\omega_0} = \frac{3,9 \cdot 50}{2 \cdot \pi \cdot 700} = 4,4 \cdot 10^{-2} \text{ H}$$

$$C = \frac{1}{L \omega_0^2} = \frac{1}{4,4 \cdot 10^{-2} \cdot 4 \cdot \pi^2 \cdot 700^2} = 1,17 \cdot 10^{-6} \text{ F} = 1,2 \cdot \mu\text{F}$$

Exercice 2

On place en série, entre deux points A et B, une bobine d'inductance L et de résistance interne négligeable, une résistance R = 80 Ω et un condensateur de capacité C. L'ensemble est soumis à une tension sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi)$ avec $U = 100$ V.

L'intensité efficace du courant vaut $I = 0,5$ A. Un voltmètre placé entre les bornes du condensateur indique 120 V.



- 1 - Calculer l'impédance du circuit (R, L, C). (0,75)
- 2 - Sachant que l'impédance du condensateur est supérieure à celle de la bobine, calculer la phase φ de la tension par rapport au courant. (0,75)
- 3 - Représenter sur un diagramme de FRESNEL les tensions U_R , U_L , U_C et U. En déduire la tension efficace U_L aux bornes de la bobine. (1,00)

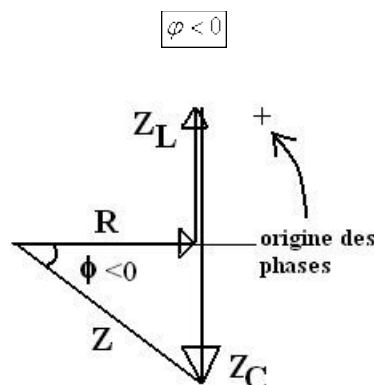
Correction 2

1-L'impédance Z du circuit:

$$Z = \frac{U}{I} = \frac{100}{0.5} = 200\Omega$$

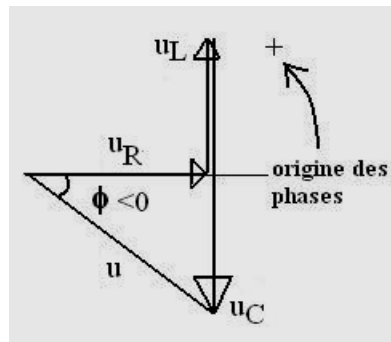
2-Appelons Z_L l'impédance de la bobine sans résistance

$Z_C > Z_L$, comme le montre le diagramme de Fresnel en impédance (ci-dessous), la tension u aux bornes de RLC est en retard sur i et don:



$$\cos|\varphi| = \frac{R}{Z} \Rightarrow |\varphi| = \text{Arc cos}\left(\frac{80}{200}\right) = 1,16\text{rad} = 66,5^\circ \text{ donc } \varphi = -66,5^\circ$$

3- Le diagramme de Fresnel en tension a même allure que celui en impédance:



$$\frac{U_L - U_C}{U_R} = \tan \varphi = \tan(-66,5^\circ) = -2,30 \quad (1)$$

$$U_R = R \cdot I = 80 \cdot 0,5 = 40V$$

$$\text{Et d'après(1) } U_L = -2,3 \cdot 40 + 120 = 28V$$