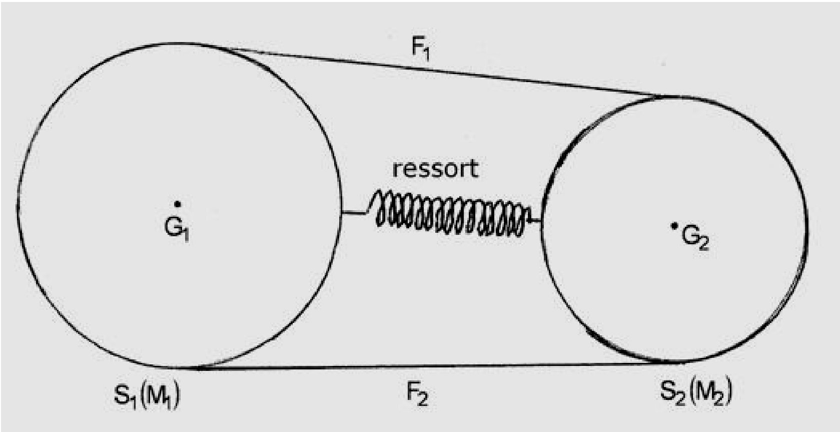
Quantité de mouvement d'un solide

1. Vecteur quantité de mouvement

1.1 Expérience

Deux mobiles autoporteurs, S_1 (masse m_1 et centre d'inertie G_1) et S_2 (masse m_2 et centre d'inertie G_2), sont reliés par 2 fils F_1 et F_2, et un ressort de masse négligeable par rapport à m_1 et m_2 .

Les 2 solides sont initialement immobiles, le ressort est comprimé sur la table.

» 

En brûlant les fils, le ressort se détend brusquement et se détache des palets S_1 et S_2 . On dit que le système (S_1 , S_2) «**éclate**». S_1 et S_2 partent selon la même direction, mais en sens opposés. En se détendant, le ressort repousse de la même façon les mobiles. Pourtant, si les mobiles ont des masses différentes, ils ne partent pas avec la même vitesse. Le mobile de plus faible masse va le plus vite.

L'étude expérimentale permet d'établir que:

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{m_1}{m_2} \rightarrow m_1 V_1 = m_2 V_2$$

$\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont les vitesses des centres d'inertie de S_1 et S_2

Ainsi, $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ ont même direction mais de sens opposés

D'où: $m_1 \vec{V}_1 = -m_2 \vec{V}_2$

1.2 Quantité de mouvement

Par définition: Le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un solide est égale au produit de vecteur $\vec{V}_G$ de son centre d'inertie G par sa masse m. Soit: $\vec{p} = m.\ \vec{V}_G$

Soit: $\vec{p}_1 = m_1 \vec{V}_1$ et $\vec{p}_2 = m_2 \vec{V}_2$ $\leftrightarrow$ $\vec{p}_1 = \vec{p}_2$

où $\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\|$ $\leftrightarrow$ $p_1 = p_2$

Dire que le ressort repousse de la même manière chaque mobile ne veut pas dire qu'il leur communique la même vitesse, mais qu'il leur donne la même quantité de mouvement.

La norme de la vitesse quantité de mouvement est appelée quantité de mouvement

$$\mathbf{p = m.\ V_G}$$

où p: exprimée en $kg.m.s^{-1}$

m: exprimée en kg

V_G: exprimée en $m.s^{-1}$

1.3 Quantité de mouvement d'un solide isolé

Le principe de l'inertie indique que le mouvement de centre d'inertie d'un solide isolé (ou pseudo isolé) est rectiligne uniforme.

Si $\vec{V}_G$ est une vecteur constant, alors le vecteur quantité de mouvement l'est aussi:

$\vec{p}$ = m. $\vec{V}_G$ = vecteur constant

1.4 Applications

a) Calculer la quantité de mouvement de la terre sur son orbite.

On donne: masse de la terre = 6.10^{24} kg=M_T

Rayon de l'orbite terrestre = 15.10^7 km = r_T

Réponse: Calculons d'abord la vitesse de la terre autour du soleil, par rapport au référentiel de Copernic

Nous savons que la durée d'une révolution est de 365,25 jours = 3,16. 10^7 secondes = t

$$\rightarrow V_G = \frac{2\pi r_T}{t} = \frac{2\pi .15.10^{10}\,\mathbf{m}}{3{,}16.10^7\,\mathbf{s}} = 3.10^4\,\mathbf{m.s}^{-1}$$

D'où la quantité de mouvement :

p = M_T .V_G = 6.10^{24} kg . 3.10^4 $m.s^{-1}$ =1,8 . 10^{29} kg.m. s^{-1}

b) Calculer la quantité de mouvement d'une hélice d'avion tournant à 2000 tours par minute.

Le solide de référence est l'avion.

Réponse: Le centre d'inertie de l'hélice se trouve, par construction même, sur l'axe de rotation de l'hélice et sa vitesse par rapport à l'avion est nulle: $V_G = 0$

La relation $\vec{p}$ = m. $\vec{V}_G$ donne une quantité de mouvement par rapport à l'avion nulle.

Nous avons ici l'exemple d'une solide en mouvement; mais ayant une quantité de mouvement nulle.

2. Système de 2 solides:

2.1 Définition:

Le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un système de 2 solides est égal à la somme des vecteurs quantité de mouvement de chaque solide.

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$$

$\vec{v}$ est toujours la vitesse du centre d'inertie du solide.

2.2 Cas d'un système isolé:

Considération à nouveau l'expérience et les résultats de I) 1-

Avant l'éclatement

Les solides sont au repos:

$(S_1):\vec{p}_1=m_1\vec{v}_1=\vec{0}$

$(S_2):\vec{p}_2=m_2\vec{v}_2=\vec{0}$

La quantité de mouvement du système est donc nulle:

$(S_1+S_2):\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{0}\rightarrow\vec{p}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=\vec{0}$

D'où: $\vec{p}=\vec{0}$

Après l'éclatement

$(S_1):\vec{p}'_1=m_1\vec{v}'_1$

$(S_2):\vec{p}'_2=m_2\vec{v}'_2$

(S_1) et (S_2) partent selon la même direction mais de sens opposés.

$(S_1+S_2):\vec{p}'=\vec{p}'_1+\vec{p}'_2=\vec{0}\rightarrow\vec{p}'=m_1\vec{v}'_1+m_2\vec{v}'_2=\vec{0}$

D'où: $\vec{p}'=\vec{0}$

La quantité de mouvement du système du pseudo isolé des 2 solides s'est conservée et $\vec{p}=\vec{p}'$

Ce résultat se généralise pour un système quelconque de 2 solides, quelques soient leurs mouvements.

La quantité de mouvement d'un système isolé (ou pseudo isolé), déformable ou non, reste constante.

Cette loi de conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé est d'un très grand intérêt par son universalité :

- elle est valable quel que soit le type d'interaction qui puisse exister entre les différentes parties du système.

- La taille du système n'a pas d'importance. Elle s'applique aussi bien aux particules qu'aux galaxies.

2.3 Applications:

a) Un wagon de masse $m_1 = 50t$, animé d'une vitesse $\vec{v}_2$ horizontale, de norme $10 km.h^{-1}$, percute un wagon au repos de masse $m_2 = 30t$.

Sachant que les 2 wagons restant accrochés, calculer leur vitesse commune $\vec{v}$ après le choc. On admettra que la quantité de mouvement se conserve au cours du choc.

Réponse: Les wagons sont en translation par rapport au sol, tous leurs points ont mêmes vecteurs vitesse.

Avant le choc:

$$(\mathbf{W}_1): \vec{\mathbf{p}}_1 = \mathbf{m}_1 \vec{\mathbf{v}}_1$$

$$(\mathbf{W}_2): \vec{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{m}_2 \vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{0} \quad \textbf{car} \quad \vec{\mathbf{v}}_2 = \vec{0}$$

(W_2) est au repos

$$(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2): \vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}_1 + \vec{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{m}_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{m}_2 \vec{\mathbf{v}}_2$$

$$\vec{\mathbf{p}} = \mathbf{m}_1 \vec{\mathbf{v}}_1 + \vec{0}$$

Après le choc:

$$(\mathbf{W}_1): \vec{\mathbf{p}}'_1 = \mathbf{m}_1 \vec{\mathbf{v}}'_1$$

$$(\mathbf{W}_2): \vec{\mathbf{p}}'_2 = \mathbf{m}_2 \vec{\mathbf{v}}'_2$$

(W_1) et (W_2) restent accrochés

$$\rightarrow \vec{\mathbf{v}}'_1 = \vec{\mathbf{v}}'_2 = \vec{\mathbf{v}}$$

$$(\mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2)': \vec{\mathbf{p}}' = \vec{\mathbf{p}}'_1 + \vec{\mathbf{p}}'_2 = \mathbf{m}_{1.} \vec{\mathbf{v}} + \mathbf{m}_{2.} \vec{\mathbf{v}} = (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) \vec{\mathbf{v}}$$

La quantité de mouvement se conserve au cours du choc

$$\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}}'$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$$

$$\mathbf{m}_{1.} \vec{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{m}_2 \vec{\mathbf{v}}_2 = (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) \vec{\mathbf{v}}$$

$$\rightarrow \quad \mathbf{m}_1 \vec{\mathbf{v}}_1 = (\mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2) \vec{\mathbf{v}}$$

$$\vec{v}=\frac{m_1}{m_1+m_2}.\vec{v}_1$$

$\vec{v}$ et $\vec{v}_1$ ont même direction et même sens car $\frac{m_1}{m_1+m_2}>0$

$$\left\|\vec{v}\right\| = \left\|\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{v}_1\right\| \Leftrightarrow v = \frac{m_1}{m_1+m_2}v_1$$

$$AN: \ v = \frac{50\ t}{50\ t+30\ t}.10\ km.h^{-1} = 6,25\ km.h^{-1}$$

$$v = 6,25\ km.h^{-1}$$

b) Recul d'une arme à feu:

Un canon de masse 1t lance un abus de 10kg dont la vitesse initiale est $750 m.s^{-1}$. Calculer la vitesse de recul du canon immédiatement après le tir.

Réponse:

Avant le tir

Le canon est immobile et l'obus reste dans le canon

$(\mathbf{Canon}):\vec{p}_1=m_1\vec{v}_1=\vec{0}$

$(\mathbf{Obus}):\vec{p}_2=m_2\vec{v}_2=\vec{0}$

$(\mathbf{Système}):\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{0}\rightarrow\vec{p}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=\vec{0}$

Après le tir

Au départ d'un coup de canon, canon et obus sont en mouvement.

$(\mathbf{Canon}):\vec{p}'_1=m_1\vec{v}'_1$

$(\mathbf{Obus}):\vec{p}'_2=m_2\vec{v}'_2$

$(\mathbf{Système}):\vec{p}'=\vec{p}'_1+\vec{p}'_2\rightarrow\vec{p}'=m_1\vec{v}'_1+m_2\vec{v}'_2$

D'après la loi de conservation de la quantité de mouvement:

$$\vec{p}=\vec{p}'$$

$$m_{1.}\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=m_1\vec{v}'_1+m_2\vec{v}'_2$$

$$\vec{0}=m_1\vec{v}'_1+m_2\vec{v}'_2$$

$$\vec{v}'_1=\frac{-m_2}{m_1}\vec{v}'_2$$

$$\vec{v}'_2 = \frac{-m_1}{m_2}\vec{v}'_1$$

$\vec{v}'_1$ et $\vec{v}'_2$ ont même direction mais de sens opposés.

$$\|\vec{v}'_1\| = \|\frac{-m_2}{m_1}\vec{v}'_2\| \quad \rightarrow \quad v'_1 = \frac{m_2}{m_1}v'_2$$

AN:

$$v'_1 = \frac{10\,kg}{1000\,kg} \times 750\,m.s^{-1} = 7{,}5\,m.s^{-1}$$