MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
SECRETARIAT GENERAL
DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PUBLIC et PRIVE
Service d'Appui au Baccalauréat

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION 2014

C

Options : C
Code matière : 009

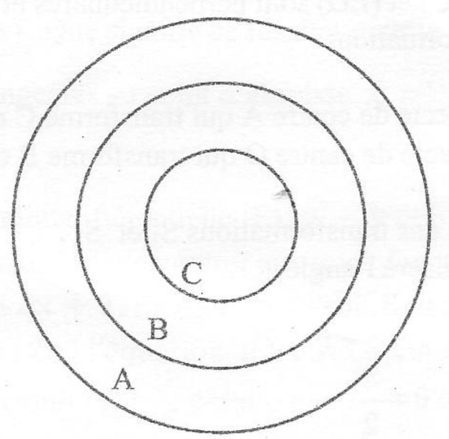
Epreuve de : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficient : 5

NB : L'utilisation d'une calculatrice scientifique non programmable est autorisée.
L'exercice et les deux problèmes sont obligatoires.

EXERCICE (4 points)

Partie A

Dans un concours de tir, la cible circulaire se divise en trois zones: A, B et C.



Chaque tir atteint nécessairement l'une des trois zones A, B, et C.
P_A, P_B et P_C sont respectivement les probabilités d'atteindre les zones A, B et C.

Sachant que $P_C = \frac{1}{6}$ et P_A, P_B et P_C forment, dans cet ordre, une progression arithmétique.

1°) Calculer P_A et P_B. **(0,5pt)**

2°) On effectue quatre tirs d'une manière indépendante. Calculer la probabilité d'atteindre au moins une fois la zone C. **(0,5pt)**

3°) Un joueur tire jusqu'à ce que la zone C soit atteinte.
Calculer la probabilité de l'évènement E:« Le jeu s'arrête au $3^{ème}$ tir ». **(0,5pt)**

4°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et P_n la probabilité pour que le jeu s'arrête au $n^{ième}$ tir.
Ecrire P_n en fonction de n. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$. **(0,5pt)**

Partie B

1- Soit x et y deux entiers naturels.
Démontrer que : $(x + 6y)^2 - x^2$ est divisible par 12 et que $(x + 6y)^4 - x^4$ est divisible par 24. **(1pt)**

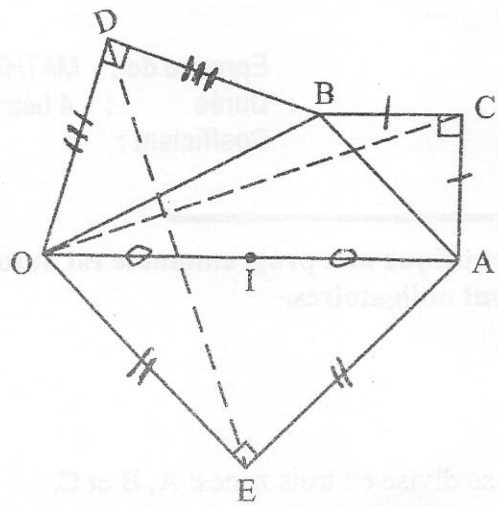
2- Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $3x \equiv 2$ [mod 7]. **(0,5pt)**

3- Déterminer la base b du système de numération dans lequel : $\left(\overline{12}\right)_b \times \left(\overline{22}\right)_b = \left(\overline{314}\right)_b$. **(0,5pt)**

/...

PROBLEME1 (7 points)

Les parties I et II sont indépendantes.
On considère un triangle quelconque AOB.
AOE est un triangle direct isocèle et rectangle en E
BAC est un triangle direct isocèle et rectangle en C
OBD est un triangle direct isocèle et rectangle en D



On se propose de démontrer que les droites (OC) et (ED) sont perpendiculaires et que OC = ED.
PARTIE I : Méthode 1 : Utilisation des transformations.
On note :

- S_1 la similitude plane directe de centre A qui transforme C en B.
- S_2 la similitude plane directe de centre O qui transforme B en D.
- $f = S_2 \circ S_1$.

1-a) Déterminer le rapport et l'angle de chacun des transformations S_1 et S_2. **(1pt)**
b) Prouver que f est une rotation dont on précisera l'angle. **(0,5pt)**
2- Déterminer l'image de I par S_1 et celle de E par S_2. **(0,5pt)**
En déduire que I est invariant par f. **(0,25pt)**

3-On appelle R la rotation de centre I et d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer R(O) et R(C) **(0,75pt)**
b) En déduire que (OC) et (ED) sont perpendiculaires et que OC = ED. **(0,5pt)**

PARTIE II : Méthode 2 : Utilisation des nombres complexes.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u} ; \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{OI}$.
On note b l'affixe de B .
1) Calculer en fonction de b l'affixe de C et l'affixe de D. **(1pt)**
2) Calculer l'affixe Z_E de E. **(0,5pt)**

3-a) Démontrer que $\frac{z_D - z_E}{z_C - z_O} = i$. **(1pt)**
b) En déduire que (OC) et (ED) sont perpendiculaires et que OC = ED. **(1pt)**

/...

PROBLEME2 (9 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x)=\begin{cases}(1-x)\,e^{x} & si\ x<1\\ x-1+\ln\dfrac{2x}{x+1} & si\ x\geq 1\end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\,)$ d'unité 1cm.

Partie I

1-Prouver que f est continue en $x_0= 1$. **(0,5pt)**

2- a) Vérifier que pour tout x>1: $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=1+\dfrac{\ln x}{x-1}-\dfrac{\ln(x+1)-\ln 2}{x-1}$ **(0,25pt)**

Démontrer que f est dérivable à droite en 1 et que $f'_d(1)=\dfrac{3}{2}$. **(0,25pt)**

b) Etudier la dérivabilité à gauche de f en $x_0=1$. **(0,25pt)**

3- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. **(0,5pt)**

4- a) Etudier le sens de variation de f sur son domaine de définition. **(1pt)**

b) Dresser le tableau de variation de f. **(0,5pt)**

5- On pose $\varphi(x)=f(x)-x+1-\ln 2$.

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$. Que signifie ce résultat pour la courbe (C)? **(0,75pt)**

6- Tracer les demi-tangentes au point d'abscisse $x_0=1$, l'asymptote et la courbe (C) **(1pt)**

Partie II

1-On considère l'équation différentielle (E): $y'-y=(-2x+1)\,e^{x}$

Soit g une solution de (E), démontrer que toute fonction φ définie par $\varphi(x)=e^{-x}g(x)$ vérifie $\varphi'(x)=-2x+1$. En déduire la solution de (E) qui prend la valeur 1 en x=0. **(1,25pts)**

2- Résoudre dans $[\,0\ ;\ 2\pi\,]$ l'équation $\sqrt{3}\cos x+\sin x-\sqrt{2}=0$ **(0,5pt)**

3- Soit la suite numérique $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par:

$$I_n=\frac{1}{n!}\int_0^1(1-x)^n e^{x}\,dx$$

a) Calculer I_1. Interpréter géométriquement ce résultat. **(0,5pt)**

b) Trouver une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.

En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $I_n=e-1-\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}$. **(1pt)**

c) Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{(n+1)!}\leq I_n\leq\dfrac{e}{(n+1)!}$. **(0,5pt)**

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k!}\right)$. **(0,25pt)**

On donne: $e^{-3}\simeq 0,05$; $e^{-2}\simeq 0,14$; $e^{-1}\simeq 0,37$;
$\ln 2\simeq 0,7$ et $\ln 3\simeq 1,1$

* *