MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
SECRETARIAT GENERAL
DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
Service d'Appui au Baccalauréat

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION 2013

C

Série : C

Code matière : 009

Epreuve de : MATHEMATIQUES
Durée : 4 heures
Coefficients : 5

NB :
- **L'exercice et les deux problèmes sont obligatoires**
- **Machine à calculer scientifique non programmable autorisée.**
- **Papiers millimétrés autorisés.**

EXERCICE 1 : 4 points

A - Arithmétique

1 – Un nombre A s'écrit 121 en base 4 et 221 en base n , $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer n. **(0,25 pt)**

2 – Prouver que, pour tout entier naturel n, $2^{6n+1} + 9^{n+1} \equiv 0\,[11]$. **(0,5 pt)**

3 – Résoudre dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ le système $\begin{cases} PGCD\,(a;b) = 6 \\ PPCM\,(a;b) = 240 \end{cases}$ **(0,75 pt)**

B – Probabilité

$n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boules numérotées de 1 à n. On veut placer ces boules dans n boîtes numérotées de 1 à n ; chaque boîte pouvant contenir de 0 à n boules.

1 – Pour n = 4, calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

E : « Chaque boîte contient une boule ». **(0,25 pt)**

F : « Chaque boîte contient une boule de telle sorte que la boîte et la boule ont le même numéro ». **(0,25 pt)**

G : « La boîte numérotée 1 contient exactement deux boules ». **(0,25 pt)**

2 – Pour $n \geq 2$, on désigne par $P_n\,(k)$ la probabilité pour que la boîte numérotée 1 contienne exactement k boule(s), $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$.

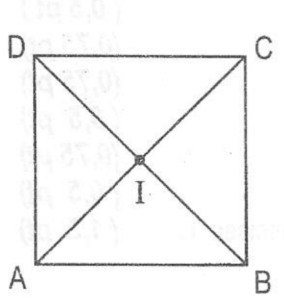
a) Démontrer que, pour tout n, $P_n(k) = C_n^k \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}$ **(1 pt)**

b) En déduire que : $\sum_{k=o}^{n} C_n^k (n-1)^{n-k} = n^n$. **(0,75 pt)**

PROBLEME 1 : 7 points

NB : Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A



Dans le plan complexe $\mathcal{P}$, on considère le carré direct ABCD de centre I. Quels que soient les points M et N du plan, on note par :

r_M la rotation de centre M et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$t_{\overrightarrow{MN}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{MN}$.

$\mathscr{S}_{(MN)}$ la réflexion d'axe (MN).

1°/ En décomposant r_A et r_B, déterminer la nature et les éléments géométriques de $r_B \circ r_A$. **(0,5 pt)**

/...

2°/ Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté au repère orthonormal $R=(A,\vec{u},\vec{v})$ où $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AD}$.

a) Déterminer la forme algébrique de $a=\dfrac{z_A-z_C}{z_B-z_C}$. **(0,25 pt)**

b) En déduire l'angle et le rapport de la similitude plane directe de centre C qui transforme B en A. **(0,5 pt)**

3°/ Soit $f=\mathcal{S}_{(AD)}\circ r_A\circ t_{\overrightarrow{AC}}$.

a) Démontrer que f est un antidéplacement. **(0,75 pt)**

b) En décomposant convenablement r_A, préciser la nature et les éléments caractéristiques de f. **(0,75 pt)**

c) En déduire l'expression complexe de f. **(0,75 pt)**

Partie B

1° Etant donné un nombre réel θ.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation à variable $t,(E_\theta):t^2-2t\cos\theta+1=0$. **(0,75 pt)**

En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation à variable complexe $z,(E'_\theta):z^4-2z^2\cos\theta+1=0$. **(0,5 pt)**

2° On désigne par A, B, C et D les images des solutions de l'équation $\left(E'_{\frac{\pi}{3}}\right)$ telles que :

$Re(z_A)<o$; $\text{Im}(z_B)<o$ avec $z_B=-z_A$; $z_D=\overline{z}_A$ et $z_C=\overline{z}_B$ où z_A,z_B,z_C et z_D sont les affixes respectives des points A, B, C et D.

a) Placer les points A, B, C et D sur le cercle trigonométrique d'unité 3 cm. **(0,5 pt)**

b) Pour quelle valeur de θ les points A, B, C et D sont-ils les sommets d'un carré ? **(0,25 pt)**

3° - A, B, C et D étant les sommets du rectangle défini dans la question 2°- a) et λ un réel tel que λ ∈ [- 1 ; 1]. On appelle G_λ le barycentre du système des points pondérés $S_\lambda=\{(A;\lambda^2+1);(B;\lambda);(D;-\lambda)\}$.

a) Exprimer $\overrightarrow{AG_\lambda}$ en fonction de $\overrightarrow{BD}$. **(0,5 pt)**

b) On pose $(E)=\{M\in\mathcal{P}$ tel que $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\|\}$.

Déterminer et construire (E). **(1 pt)**

PROBLEME 2 : 9 points

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]o;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=x^2-1-2\ln x \text{ si } x\in\,]o;1[\\ f(x)=(3x-3)\,e^{-x} \text{ si } x\geq 1\end{cases}$

On note par (C) sa courbe dans un repère orthonormé d'unité graphique 4 cm.

Partie A

1° a) Démontrer que f est continue au point d'abscisse 1. **(0,5 pt)**

b) Etudier la dérivabilité de f au point d'abscisse 1. **(0,75 pt)**

2° a) Etudier, suivant les valeurs de x, le sens de variation de f. **(0,75 pt)**

b) Dresser alors le tableau de variation de f. **(0,5 pt)**

3° a) Démontrer que f admet un unique point d'inflexion I que l'on précisera. **(0,75 pt)**

b) Déterminer l'équation de la tangente (T) à (C) au point I. **(0,5 pt)**

c) Tracer (T) et (C) dans le même repère en précisant les demi-tangentes au point d'abscisse 1. **(1,5 pt)**

Partie B

Pour tout réel λ tel que $0 < \lambda < 1$, on pose $I(\lambda) = \int_{\lambda}^{1} f(t)\,dt$.

Quels que soient les entiers n et k tels que : $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$, on pose $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

1°/ a) A l'aide d'une intégration par parties, déterminer $I(\lambda)$ en fonction de λ. **(0,5 pt)**

b) Calculer alors $\lim\limits_{\lambda \to o} I(\lambda)$. **(0,25 pt)**

2°/ a) Démontrer que $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$. **(1 pt)**

b) En déduire que $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\,dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. **(0,5 pt)**

c) Démontrer **alors** que $I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$. **(0,75 pt)**

d) Déterminer $\lim\limits_{t \to o} t f(t)$. **(0,25 pt)**

e) Calculer **ainsi** $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. **(0,5 pt)**

__NB__ : Pour la construction, on prend $e^{-1} = 0{,}4$; $e^{-2} = 0{,}2$ et $e^{-3} = 0{,}05$.