MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
SECRETARIAT GENERAL
DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
**DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR PUBLIC et PRIVE**
**Service d'Appui au Baccalauréat**

BACCALAUREAT DE L'ENSEIGNEMENT GENERAL

SESSION 2016

***************

**Série :** C

**Code matière :** 009

**Epreuve de :** MATHEMATIQUES
**Durée** : 4 heures
**Coefficient** : 5

* * * * * * * * * * *

**NB : L'utilisation d'une calculatrice scientifique non programmable est autorisée.**
**L'exercice et les deux problèmes sont obligatoires.**

**EXERCICE** : (4 points)

I- Arithmétique

1- On considère l'équation à deux inconnues (x, y) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ suivante :

$3x - 8y = 1$ (E)

a) Vérifier que (3 ; 1) est une solution de (E). (0,5pt)

b) Résoudre l'équation (E). (0,5pt)

2- a, b, c sont des entiers naturels non nuls. Un entier naturel non nul A s'écrit $\overline{(b\,0\,a)}_5$ dans le système de numération à base cinq et $\overline{(abc)}_7$ dans le système de numération à base sept.

Démontrer que c = 6 puis déterminer a et b (0,5pt+0,5pt)

II- Probabilité

Le code confidentiel d'une carte bancaire est un nombre entier de quatre chiffres non nuls.

1) Combien y a-t-il de codes possibles ? (1pt)

2) Le code d'une carte est choisi au hasard. Calculer les probabilités de chacun des événements suivants :

A : « Le code est un nombre pair ». (0,25pt)

B : « Le code n'est composé que de chiffres pairs ». (0,25pt)

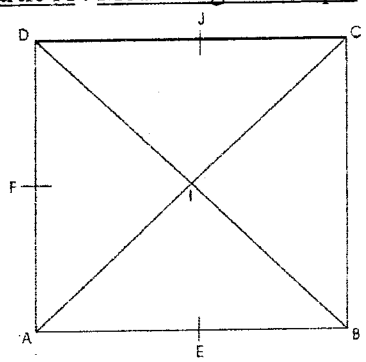
C : « Le code contient une fois et une seule le chiffre 2 ». (0,25pt)

D : « Le code est écrit avec des chiffres distincts ». (0,25pt)

**PROBLEME 1** (7 points)

Les deux parties A et B sont indépendantes. On note $S_{(\Delta)}$ la symétrie orthogonale d'axe $(\Delta)$, par $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{V}$.

Partie A : Méthode géométrique




Dans le plan orienté ($\mathscr{P}$), on donne un carré direct ABCD de centre I, avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.

On note par E le milieu de [AB], et F le milieu de [AD] et par J, le milieu de [CD]

1°/ Soit G le barycentre du système des points pondérés $\{(A ; -1) ; (B ; 1) ; (D ; 1)\}$

a / Démontrer que G appartient à la droite (AI) (0,5pt)

b / Déterminer et construire G (0,5pt)

c/ Soit ($\mathscr{C}$) l'ensemble des points M du plan vérifiant :

$2MI^2 - MA^2 = 0$

Démontrer que $B \in (\mathscr{C})$ (0,5pt)

Déterminer et construire ($\mathscr{C}$). (0,5pt)

2°/ Soit $\sigma$ la symétrie centrale de centre I et $f = \sigma \circ S_{(EF)}$

En décomposant $\sigma$ en produit de deux symétries orthogonales convenables, démontrer que

$f = S_{(AC)} \circ t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$ (1,5pt)

/...

Partie B : Utilisation des nombres complexes

ABCD est toujours le carré de la partie A, de centre I ; $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ ; le milieu de [CD] est J.

Soit S une similitude directe qui transforme A en I et B en J.$(\Gamma_1)$ est un cercle de diamètre [AI] et $(\Gamma_2)$, un cercle de diamètre [BJ].

On donne le repère orthonormé direct $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

1) Donner les affixes des points A, B, C, D, I, et J. 0,5pt)

2) Ecrire l'expression complexe de S. En déduire ses éléments caractéristiques 0,5pt+0,25pt)

3) a) Préciser les centres et les rayons des cercles $(\Gamma_1)$ et $(\Gamma_2)$. (0,5pt x 2)

b) Démontrer que le centre Ω de S est un point d'intersection de $(\Gamma_1)$ et $(\Gamma_2)$. (0,25pt+0,25p)

4) a) Déterminer le point C', image de C par S puis le point K, image de I par S. (0,25pt+0,25pt)

b) Démontrer que les points A, Ω, K sont alignés. (0,25pt)

**PROBLEME 2** (9 points)

Soit $f$ une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par:

$$f(x)= \begin{cases} (x-1)\ln(1-x) & \text{si } x < 0 \\ e^{\frac{x}{2}} - x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

A- 1°/ Etudier la continuité et la dérivabilité de $f$ en $x_0 = 0$ (0,25pt+0,75pt)

2°/ a) Calculer les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$ (0,25ptx2)

b) Etudier les variations de $f$ (1pt)

c) Démontrer que l'équation $f(x)= 0$ admet une solution unique $a \in [2, 3]$. (0,25pt)

3°/ Tracer $(\mathscr{C})$ (On précisera les branches infinies et les demi-tangentes à l'origine du repère) (1,25pt)

B- On se propose de trouver une valeur approchée de la solution $a$ de l'équation $f(x)= 0$ de la partie A.

On considère une fonction g définie sur $]-1,+\infty[$ par : $g(x) = 2\ln(x+1)$

1- Etudier les variations de g (0,5pt)

2- Démontrer que $a$ est une solution de l'équation : g(x)= x (1pt)

3- Démontrer que pour tout $x \in [2, +\infty[$, $g(x) \in [2, +\infty[$. (0,5pt)

4- On définit une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = g(U_n) & \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a- Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 2$ (0,5pt)

b- Prouver que pour tout $x \in [2, +\infty[$, $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$ (0,25pt)

c- Démontrer, en utilisant les inégalités des accroissements finis, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$|U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3} |U_n - a|$ ; (0,25pt)

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ (0,5pt)

d- Démontrer que la suite $(U_n)$ converge vers $a$. Déterminer le plus petit entier naturel $n_0$ tel que $U_{n_0}$ soit une valeur approchée de $a$ à $10^{-1}$ près. (0,25pt+0,25pt)

C- Soit l'équation différentielle (E) : 2y'-y = x – 1

1) Démontrer que $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x - 1$ est une solution de (E). (0,5pt)

2) En déduire la solution générale de l'équation (E). (0,25pt+0,25pt)

On donne ln 2≃ 0,7 ; ln3 ≃ 1,1 ; ln10≃ 2,3 ; $e \simeq 2,7$ et $e^{\frac{3}{2}} \simeq 4,5$

oooooooooooooooooooo