

C

Série : C

Epreuve de : MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Code matière : 009

Coefficient : 5

NB : L'utilisation d'une calculatrice scientifique non programmable est autorisée.
 L'exercice et les deux problèmes sont obligatoires.

EXERCICE : (4 points)

Arithmétique:

1. a) Montrer que pour tout entier naturel x et y , on a $x + y$ et $x - y$ ont la même parité. (0,5pt)
- b) En déduire la résolution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ de l'équation : $x^2 = y^2 + 8$ (0,5pt)
2. a) Résoudre dans \mathbb{N} l'équation : $5x \equiv 1 \pmod{3}$ (0,5pt)
- b) En déduire une solution particulière de l'équation : $5x - 3y = 1$ (0,25pt)
- c) Résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation : $5x - 3y = 1$ (0,25pt)

Probabilité :

Une urne contient 3 boules blanches et n boules noires ($n \geq 3$). Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

- 1- Un enfant tire simultanément deux boules de l'urne. On note par A_n l'évènement : « obtenir au moins une boule noire ».
 - a) Calculer la probabilité $P(A_n)$ de A_n (0,5pt)
 - b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$. (0,25pt)
 - c) Pour quelles valeurs de n a-t-on $P(A_n) \leq 0,99$? (0,5pt)
- 2- On remet l'urne dans la condition initiale. L'enfant tire de nouveau au hasard une à une 3 boules en remettant dans l'urne chaque boule qui a été tirée. Soit l'évènement B_n : « tirer 3 boules blanches. »
 - a) Calculer la probabilité $P(B_n)$ de B_n (0,5pt)
 - b) Déterminer la valeur de $n \in \mathbb{N}$ pour que $P(B_n) = \frac{27}{1000}$. (0,25pt)

PROBLÈME 1 (7points)

Dans le plan orienté (\mathcal{P}) , on considère le triangle équilatéral ABC tel que $\text{mes}(\widehat{BC, BA}) = \frac{\pi}{3}$ et $AB = 4\text{cm}$.

Soit I le projeté orthogonal de A sur le segment $[BC]$. La droite parallèle à la droite (AI) et passant par le point C coupe la droite (AB) au point Ω . On note par D la symétrique de B par rapport au point C.

Soient t la translation de vecteur \overrightarrow{BC} ; r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$; r_1 la rotation de centre B et

d'angle $\frac{-\pi}{3}$; $f = tor$ et $g = for_1$.

Partie A

- 1- Faites la figure et placez les points A, B, C, D, I et Ω . (0,5pt)
- 2- a) Décomposer t en deux symétries orthogonales dont l'un des axes est la droite (AI) . (0,5pt)
- b) Décomposer r en deux symétries orthogonales dont l'un des axes est la droite (AB) . (0,5pt)
- c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f . (0,5pt)
- 3- a) Déterminer $g(B)$. (0,5pt)
- b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g . (0,5pt)
- 4- On note par $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$.
 - a) Placer les points A', B' et C' sur la même figure. (0,5pt)
 - b) Quelle est la nature du triangle $A'B'C'$? Justifier. (0,25pt)
 - c) Montrer que Ω, A' et B' sont alignés. (0,25pt)

Partie B

Le plan (\mathcal{P}) est rapporté à un repère orthonormé direct (B, \vec{u}, \vec{v}) . Sachant que $\vec{u} = \frac{1}{3} \overline{BI}$ et $\vec{v} = \frac{1}{3\sqrt{3}} \overline{IA}$

- 1- a) Exprimer le vecteur \overline{BA} en fonction des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} . (0,5pt)
- b) Déterminer les affixes des points A, B et C. (0,25pt×3)
- 2- a) Ecrire les expressions complexes de t, r et r_1 . (0,25pt×3)
- b) En déduire les expressions complexes de f et g . (0,25pt×2)
- c) Déterminer leurs natures et leurs éléments caractéristiques. (0,25pt×2)

PROBLEME 2 (9points)

Partie A

Pour tout entier naturel $n > 0$, soit la fonction numérique f_n de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-x}}{(1+x)^n}$$

On note par (\mathcal{C}_n) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) d'unité 1cm.

- 1) a- Calculer les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition (on distinguera les cas où n est pair ou impair). (1pt)
- b- Calculer la fonction dérivée $f_n'(x)$ en fonction de x et n . (0,5pt)
- c- Dresser les tableaux de variations de f_n selon la parité de n . (1pt)
- 2) Montrer que toutes les courbes (\mathcal{C}_n) passent par un point fixe de coordonnées que l'on précisera. (0,25pt)
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x}$ (distinguer les deux cas où n est pair ou impair). (0,25pt)
- 4) a- Etudier suivant les valeurs de x la position relative des courbes (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) . (0,25pt)
- b- Tracer (\mathcal{C}_1) et (\mathcal{C}_2) dans le même repère. (1pt)

Partie B

Pour tout entier naturel $n > 0$, soit $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$.

- 1) Donner l'expression de $f_n'(x)$ en fonction de $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$. (0,5pt)
- 2) a- Montrer que la suite (I_n) est décroissante. (0,5pt)
- b- En déduire que la suite (I_n) est convergente. (0,5pt)
- 3) a- Démontrer que pour tout entier naturel $n > 0$ et $0 \leq x \leq 1$, on a : $\frac{e^{-1}}{(1+x)^n} \leq f_n(x) \leq \frac{1}{(1+x)^n}$. (0,25pt)
- b- En déduire que pour tout $n > 0$, on a : $\frac{e^{-1}}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right] \leq I_n \leq \frac{1}{n-1} \left[1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right]$. (0,25pt)
- c- Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$. (0,25pt)
- 4) a- En utilisant la question 1) de la partie B, montrer que : $I_n + nI_{n+1} = 1 - \frac{e^{-1}}{2^n}$. (0,25pt)
- b- En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_{n+1}$. (0,25pt)

Partie C (Cette partie est indépendante des deux parties A et B)

Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel $n > 0$ par : $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx$.

- 1) Etudier le signe de $(x^{n+1} - x^n)$ sur l'intervalle $[0; 1]$. (0,25pt)
- 2) En déduire le sens de variation de (U_n) . (0,5pt)
- 3) La suite (U_n) est-elle convergente ? Justifier. (0,5pt)
- 4) Démontrer que pour tout entier naturel $n > 0$, on a : $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$. (0,5pt)
- 5) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$. (0,25pt)
