ENERGIE CINETIQUE – ENERGIE POTENTIELLE

EXERCICE I : ENERGIE CINETIQUE

Un disque homogène de centre O et de rayon r = 10cm, a une masse M = 1,3kg. Dans une première expérience, le disque roule sans glisser sur un plan incliné qui fait un angle α= 30° avec l'horizontale. La vitesse initiale est nulle.

1° - Exprimer l'énergie cinétique totale du disque en fonction de la vitesse du centre de gravité.

2° - Sachant que le travail des forces extérieures appliquées au disque se réduit au travail des forces de pesanteur, calculer l'accélération du centre de gravité.

On prendra g = 10m/s^2

SOLUTION

1° - **Energie cinétique totale du disque**

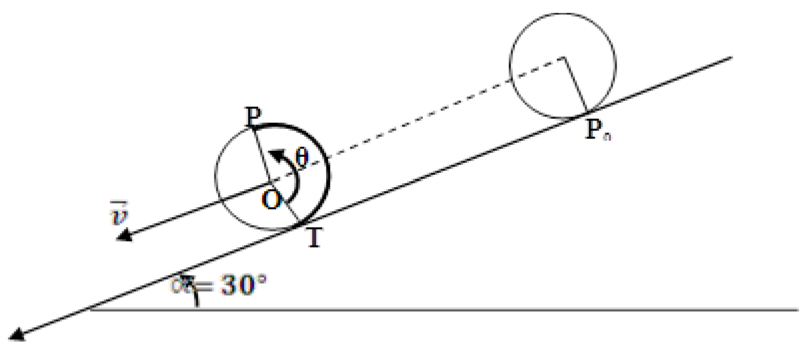
Rappel. Si un disque homogène de rayon r roule sans glisser, la vitesse v du centre de gravité O est liée à la vitesse angulaire ω du disque par la relation v=Rω

Pour démontrer, observons que avec les orientations indiquées sur la figure, on a :

$$\overline{P_0T} = \overline{TP}$$

l'abscisse $x = \overline{P_0T}$ est donc liée à l'angle θ dont le disque a tourné par : $x = r\,\theta$

D'où en dérivant par rapport au temps : v= r. ω



Energie cinétique de translation :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

Energie cinétique de rotation :

$$E_c = \frac{1}{2}J_0\omega^2$$

en désignant par J_0 le moment d'inertie du disque par rapport à O. on sait que :

$$J_0 = \frac{1}{2}Mr^2$$

d'où l'énergie cinétique de rotation :

$$\frac{1}{2}J_0\omega^2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}Mr^2\omega^2 = \frac{1}{4}Mv^2$$

ou comme

$$r\omega = v; \quad \frac{1}{4}Mv^2$$

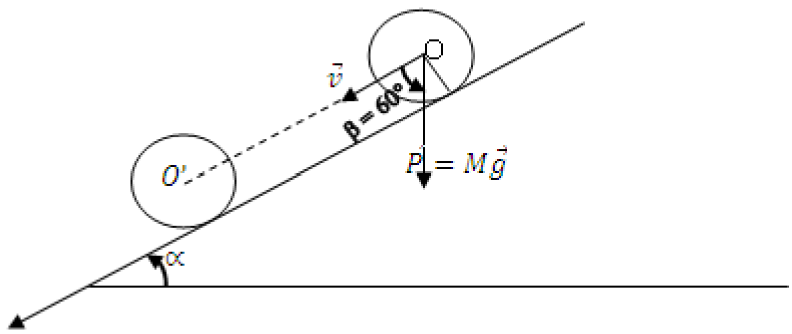
.

L'énergie cinétique totale E_c du disque est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie cinétique de rotation d'où :

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{4}Mv^2 = E_c = \frac{3}{4}Mv^2$$

2° **- Accélération du centre de gravité**

Seul le poids travaille ; le travail de la pesanteur quand le centre se déplace de $\overline{OO'} = x$ (pendant le temps t) est :



$$W_p = \vec{P}.\overrightarrow{MM'} = Mg\,x\cos\beta = Mg\,x\cos 60° = Mg\frac{x}{2}$$

On obtiendrait le même résultat en observant que le centre O descend d'une distance :

$$OO' \cos\beta = x\cos\beta$$

d'où $W_{\vec{P}} = Mgx cos\beta$

L'énergie cinétique à l'instant *t* est : $E_c = \frac{3}{4}Mv^2$, si nous notons T_0 l'énergie cinétique à l'instant *t = 0*, on sait que la variation d'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = \frac{3}{4}Mv^2 - T_0$$

est égale au travail des forces extérieures d'où :

$$\frac{3}{4}Mv^2 - T_0 = Mg\frac{x}{2}$$

En dérivant par rapport à *t*, on obtient :

$$\frac{3}{2}Mvv' = Mg\frac{x'}{2}$$

Ou comme : $v' = \gamma \ et \ x' = v$

$$\frac{3}{2}Mv\gamma = Mg\frac{v}{2} \implies \gamma = \frac{g}{3}$$

Application numérique :

$$\gamma = \frac{10}{3} = 3{,}33 m.s^{-2}$$

EXERCICE II

I – On prend g = 10 m.s^{-2}. L'action de l'air ainsi que tous les frottements sont négligeables. On suppose que les fils sont inextensibles et de masses négligeables. Les parties I, II, III sont indépendantes.

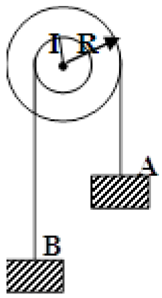
Un volant homogène, de rayon R = 10 cm, est mobile autour de son axe maintenu fixe et horizontal.

Son moment d'inertie par rapport à cet axe est J = 6,8.10^{-4} Kg.m^2. Sur le volant s'enroule un fil dont l'une des extrémités est fixée au volant, l'autre soutient un corps A de masse m_A = 100g. Le système étant abandonné sans vitesse initiale, étudier la nature du mouvement de A et calculer l'accélération angulaire du volant.

II – On fixe sur ce volant une poulie coaxiale, de masse négligeable, de rayon r = 4 cm. Dans la gorge de cette poulie s'enroule un fil dont l'une des extrémités est fixée à la poulie, l'autre soutient un corps B de masse m_B = 200g. Les fils sont enroulés en sens inverse
sur le volant et sur la poulie.

- Le système, initialement au repos, est abandonné à lui-même.

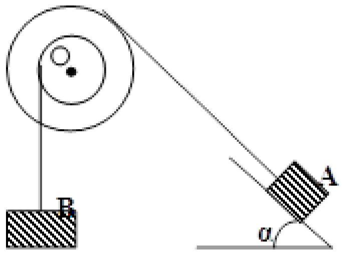
1°- Calculer l'accélération angulaire du système volant-poulie



2°- Etudier la nature du mouvement de A. Calculer l'espace parcouru par A au bout de 1 seconde de mouvement.

3°- Etudier la nature du mouvement de B. Calculer l'espace parcouru par B au bout de 1seconde de mouvement.

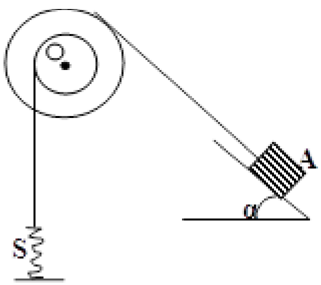
- Le corps A glisse le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant avec le plan horizontale l'angle $\alpha = 30°$. Le fil attaché au corps A reste parallèle à la ligne de plus grande pente. Le système, initialement au repos, est abandonné à lui-même.



1° - Calculer l'accélération angulaire du système volant poulie.

2° - Etudier la nature du mouvement de A. Calculer l'espace parcouru par A au bout de 1s de mouvement.

3° - A cet instant précis, le fil liant le corps A au volant casse brusquement. Etudier les mouvements ultérieurs des corps A et B, en supposant qu'ils ne rencontrent pas d'obstacles et que le corps A reste au contact du plan.



III - Le corps A glisse le long de la ligne de plus grande pente d'un plan incliné faisant avec le plan horizontal l'angle $\alpha = 30°$. Le fil, attaché au corps A reste parallèle à la ligne de plus grande pente. On détache le corps B, l'extrémité libre du fil est attachée à un ressort en hélice ; à spires non jointives de masse négligeable. Ce ressort est fixé en S au sol, reste vertical ; sa longueur à vide est l_0 = 10 cm et il s'allonge de 1cm sous l'action d'une force de 1N.

1° - Calculer à l'équilibre la longueur du ressort

2° - Le corps A déplacé, à partir de sa position d'équilibre de 2cm vers le bas, le long de la ligne de plus grande pente, est abandonné sans vitesse initiale. On suppose que les fils restent tendus ; étudier le mouvement de A, préciser l'expression de l'élongation en fonction du temps.

SOLUTION

I -1°) **L'accélération angulaire du volant** :

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{mAg}{R(\frac{J}{R^2}+mA)} = 59{,}52rd.s^{-2}$$

.

A effectue un mouvement rectiligne uniformément accéléré suivant la verticale descendante de : $\overline{\delta_A} = \frac{m_A.g}{\frac{J}{R^2}+m_A}$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{(m_AR-m_Br)g}{J+m_AR^2+m_Br^2} = 10rd.s^{-2}$$

2°- A effectue un mouvement rectiligne uniformément accéléré suivant la verticale descendante de :

$$\delta_A = R\ddot{\theta}_2 = 1m.s^{-2}$$

L'espace est x_A = 0,5 m

3° - B effectue un mouvement rectiligne uniformément accéléré suivant la verticale ascendante de

$$\bar{\delta}_A = r\ddot{\theta}_2 = 0{,}4m.s^{-2} \ et\ x_B = 0{,}2m$$

II- 1°- **Accélération angulaire** : $\ddot{\theta}_3 = \frac{m_AR\sin\alpha - m_Br}{J+m_AR^2+m_Br^2}g = -15rd.s^{-2}$

2° - $\delta_A = R.\ddot{\theta}_3 = 1{,}5m.s^{-2}\ et\ x_A = \frac{1}{2}\delta_At^2 = 0{,}75m$

3° - A effectue d'abord un mouvement rectiligne uniformément retardé depuis l'instant de rupture suivant la ligne de plus grande pente jusqu'à ce que la vitesse s'annule. Puis un mouvement rectiligne uniformément accéléré descendant

1ère phase :

$$\bar{\delta}_{A'} = -5m.s^{-2} = -g\sin\propto$$

qui dure t telle que :

$$-5\,t^2 + 1,5 = 0 \quad t = 0,3s$$

<u>$2^{ème}$ phase</u> :

$$\ddot{\delta}_{A''} = 5m.s^{-2}$$

B effectue un mouvement rectiligne uniformément accéléré descendant suivant la verticale de :

$$\bar{\delta}_{B'} = r\ddot{\theta} = 3,2m.s^{-2}$$

III- 1° -

$$l = l_0 + \frac{m_A g\sin\propto}{k}\cdot\frac{R}{r} = 0,1125m$$

2°-

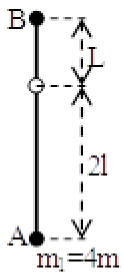
$$\ddot{x} + \frac{kr^2}{J+m_A R^2}x = 0$$

A effectue un mouvement rectiligne uniformément sinusoïdal. Suivant la ligne de plus grande pente :

$$\boldsymbol{x(m) = 2.10^{-2}\sin(9,76t + \frac{\pi}{2})}$$

EXERCICE III

Dans tout le problème, en prend $g = 10$ m.s^{-2} et on néglige tous les frottements.



A – 1° - Deux petites billes, assimilables à des points matériels, l'une A de masse $m_1 = 4m$, l'autre B de masse $m_2 = 3m$, sont placées aux extrémités d'une tige rigide T de masse négligeable mobile autour d'un axe horizontale perpendiculaire à T en O (fig .1)

Fig1

OA = 2L, OB = L. Le système étant en équilibre, on l'écarte dans un sens choisi comme positif, d'un petit angle $\propto_m$ et on l'abandonne sans vitesse initiale à t = 0.

a) Etablir l'équation différentielle régissant le mouvement du système et en déduire sa nature.

b) Donner l'expression de l'élongation angulaire $\propto = f(t)$

c) Quelle est la période du pendule ainsi constituée ? Déterminer la longueur du pendule simple synchrone.

d) Quelles sont les vitesses de A et de B lorsque la tige passe par sa position d'équilibre ? Quelle est alors l'énergie cinétique du système ?

A.N: m = 10g , l = 10 cm , $\propto_m = 0{,}1 rad$.

2° - Un ressort de constante de raideur K et de masse négligeable est suspendu par son extrémité supérieure à un point fixe. On suspend à l'autre extrémité une masse M.

On déplace verticalement vers le bas, la masse M à partir de sa position d'équilibre et on l'abandonne sans vitesse initiale. Quelle doit être la valeur de K pour que la masse M et le pendule envisagé précédemment oscille avec la même période ?

AN : m= 1kg

B° - On enlève la bille B, la tige T, toujours mobile autour de l'axe horizontal passant par O, est maintenant placée horizontalement. On l'abandonne sans vitesse initiale.

1°- Quelle est la vitesse de la bille A au passage à la position d'équilibre ?

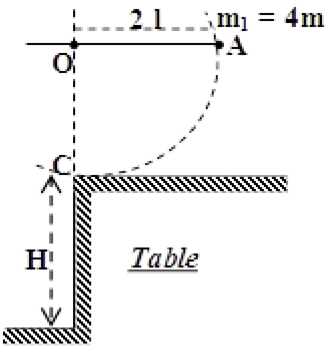


Fig :2

A .N : OA = 2L = 20 cm

2° - Lors du passage en cette position, la bille A rencontre une bille C supposée ponctuelle, de masse m_3 = 5 m, placée sur le bord d'une table *fig.2*. Quelle sont les vitesses de A et C, considérées comme colinéaires, après un choc supposé parfaitement élastique ? Faire l'application numérique.

3° - La bille C se trouve avant le choc, à la hauteur H au-dessus du sol. Etudier la nature du mouvement de C après le choc. Etablir l'équation de la trajectoire de la bille C dans un système d'axes que l'on précisera. A quelle distance de la verticale du point O va-t-elle rencontrer le sol supposé horizontal ? Avec quelle vitesse touchera-t-elle le sol ?

AN : H = 1 m

4° - Quel est l'angle maximal de remontée de A après le choc ?

SOLUTION

A° - 1°- a)

$$\ddot{\alpha} + \frac{5}{19}\frac{g}{l}\alpha = 0$$

le système effectue un mouvement sinusoïdal de rotation autour de 0

b)

$$\alpha = \alpha_m \sin\left(\sqrt{\frac{5}{19}\frac{g}{l}}\,t + \frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1\sin\left(5{,}13t + \frac{\pi}{2}\right)$$

c)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{19l}{5g}} = 1{,}22s\ ;\ l = \frac{19l}{5} = 0{,}38m$$

d) Soit Ω la vitesse angulaire du pendule au passage à la position d'équilibre.

$v_A=2l\Omega$; $v_B=l\Omega$ or Ω est déterminé par le théorème de l'E_C

$1/2(16ml^2+3ml^2)^2=8mgl(1-\cos\theta)-3mgl(1-\cos\theta)$

d'où

$$\Omega = \sqrt{\frac{10g}{19l}(1-\cos\theta)}$$

v_A = 0,102 m. s^{-1}

v_B = 0,051 m.s^{-1}

$$E_c = \frac{19ml^2}{2}\Omega^2 = 2{,}5.\,10^{-4}J.$$

2°-

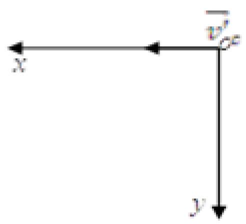
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{19l}{5g}} = 2\pi\sqrt{\frac{M}{K}} ==> K = \frac{5Mg}{19L}$$

D'où K = 26,31 N.m^{-1}

B/ 1°- $v_A = 2l\,\Omega$ avec Ω tel que :

$$\frac{1}{2}4m(2l)^2\Omega^2 = 4mg2l$$

d'où $v_A = 2l\sqrt{\frac{g}{l}}$ *et* $v_A = 2m.s^{-1}$



2°-

$$\overline{v'_A} = \frac{m_1 - m_3}{m_1 + m_3}\overline{v_A} = -\frac{1}{9}v_A = -0{,}22m.s^{-1}$$

$$\overline{v'_C} = \frac{2m_1 v_A}{m_1 + m_3} = \frac{8}{9} v_A = 0{,}88ms^{-1}$$

3° - C effectue un mouvement de chute libre avec vitesse initiale horizontale $\overline{v'_c}$. Sa trajectoire a pour équation des systèmes d'axes donnés :

$$y = \frac{1}{2}\frac{g}{v'^2_C}x^2 = 6{,}45x^2$$

La bille rencontre le sol à une distance d telle que H = 6,45 d^2 de la verticale de 0 d'où d = 0,39m. Elle touchera le sol avec une vitesse v telle que : $v^2 - v'^2_c = 2gH$ et v=4,55m.s^{-1}

4°- Après le choc, la bille remonte faisant un angle θ avec la verticale θ tel que

$$0 - \frac{1}{2}m_1 v'^2_A = -m_1 g 2l(1 - cos\theta)$$

d'où

$$cos\theta = 1 - \frac{v'^2_A}{4gl} ==> \theta \approx 8{,}92°$$

EXERCICE IV

On négligera les frottements et on prendra g = 10m. s^{-2} dans tout le problème.

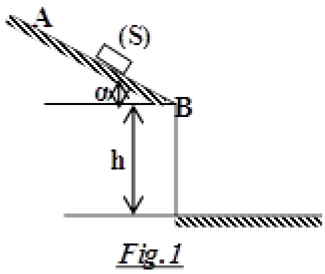


Fig.1

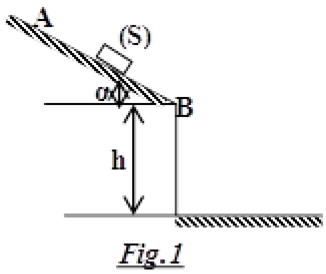


Fig.1

A – Un solide (S) que l'on assimilera à un point matériel de masse M = 200g, peut glisser en suivant la ligne de plus grande pente d'un plan incliné qui forme l'angle α = 30° avec le plan horizontal. Le solide (S) est lâché sans vitesse initiale du point A. Il parcourt la distance AB = l = 2,50m sur le plan incliné ***(fig 1)***

1° - Déterminer la nature du mouvement pris par (S) et calculer la durée t_1 du trajet AB.

2°- Calculer le module V_1 de la vitesse $\vec{v_1}$ de (S) en B. Quelles en sont les composantes horizontale et verticale V_{1x} et V_{1y} ?

B - Arrivé en B, le solide (S) animé de la vitesse $\vec{v_1}$ tombe sur un plan horizontal situé en contre bas à une distance h de B (*fig.1*).

La chute dure t_2 = 0,5 s.

1° - Calculer la distance horizontale d comprise entre la verticale passant par B et le point d'impact sur le plan horizontal, puis la hauteur *h*.

2°- Calculer l'énergie cinétique du solide (S) à son arrivée sur le plan horizontal.

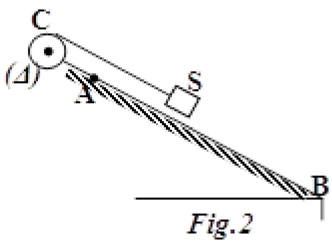


Fig.2

C - Le solide (S) remplacé en A est attaché à un fil inextensible, de masse négligeable. Ce fil s'enroule sur un cylindre (C) de rayon r = 4cm, (C) est mobile autour de son axe horizontale (Δ) (*fig.2*). Le système est abandonné sans vitesse initiale, le fil déjà tendu étant parallèle à AB. On constate que pour arriver en B le solide (S) met un temps t_3 = 2s

1° Déterminer la nature du mouvement du solide (S) et calculer le moment d'inertie J du cylindre (C) par rapport à son axe (Δ).

2° Lorsque le solide arrive en B le fil est entièrement déroulé et il se détache du cylindre (C) qui a atteint une vitesse angulaire notée θ'_0.

On freine le cylindre (C) au moyen d'un patin dont l'action est équivalente à celle d'un couple de moment constant. L'arrêt s'effectue au bout d'un temps t_4 = 10s.

Calculer l'intensité M du moment du couple de freinage exercé par le patin.

SOLUTION

A - 1° - (S) effectue un mouvement rectiligne uniformément accéléré suivant la ligne de plus grande pente.

Durée du trajet AB :

$$t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g \sin\propto}} = 1s$$

2°

$$v_1 = \delta t_1 = (g \sin \propto)t_1 = 5m.s^{-1}$$

$v_{1x} = v_1 \cos \propto = 4{,}33ms^{-1}$ *(horizontale orientée la droite)*

$v_{1y} = v_1 \sin \propto = 2{,}5m.s^{-1}$ *(verticale descendante)*

B - 1°- La distance est l'abscisse du point d'impact atteint à l'instant t_2 :

$$d = x_2 = v_1 t_2 \cos \propto = 2{,}16m\,,$$

h est l'ordonnée du point d'impact

$$y = \frac{1}{2}gr^2 + v_l t \sin \propto = 2{,}50m$$

2°-

$E_{C_{sol}} - E_{C_A} = MgH$

$E_{C_A} = 0 = 7{,}5J$

C - 1°-

$$\bar{\delta_S} = \frac{Mg\sin\propto}{\frac{J}{R^2}+M}$$

(S) effectue un mouvement rectiligne uniformément accéléré

$J = \frac{Tr}{\ddot{\theta}} = Mr^2(\frac{g}{\bar{\delta_s}}\sin \propto -1) = 9{,}6.10^{-4}kg.m^2$

2° - A l'arrêt :

$\dot{\theta} = 0 = \frac{\bar{\mu}}{J}t_4 + \theta'_0 ==> \bar{\mu} = \frac{-J\theta'_0}{t_4}$

$\theta'_0 = \frac{v_B}{r} = \frac{\delta_S t_3}{r} ==> \bar{\mu} = -6.10^{-3}m.N$