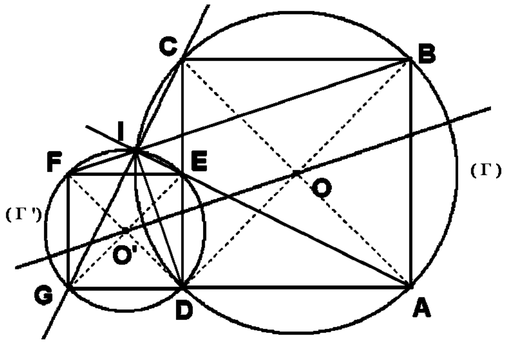
Série C - session 2007 : problème 1 – corrigé

Partie A : Utilisation des propriétés géométriques des transformations

1- Construction : AB = 6 cm



2- a) Rapport et l'angle de S

On a $S(D) = D$ et $S(A) = B$

Le rapport $k = \frac{DB}{DA} = \frac{AB\sqrt{2}}{AB} = \sqrt{2}$

L'angle $\theta = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) = \frac{\pi}{4}$

b) Image du point E par S

Soit $E' = S(E)$, on a $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DE'}) = \frac{\pi}{4}$ et $DE' = \sqrt{2}\,DE$

On a $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = \frac{\pi}{4}$, donc $E' \in (DF)$. De plus $DF = \sqrt{2}\,DE$, d'où $E' = F$.

Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF})$

On a $S(A) = B$ et $S(E) = F$ alors $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}) = \frac{\pi}{4}$

3 – a) Construction de I (voir figure)

b) Montrons que le point I est l'intersection des cercles (Γ) et (Γ')

Le point I est l'intersection des droites (AE) et (BF).

Comme $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}) = \frac{\pi}{4}$, on a $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{4}$. Alors $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$, d'où I,D, A et B appartiennent au cercle (Γ).

Ensuite, $(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{4}$ et $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IF}) = \pi$ implique $(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IF}) = \frac{\pi}{4} + \pi$. Or, $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) = \frac{\pi}{4}$, d'où $(\overrightarrow{IE}, \overrightarrow{IF}) = (\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}) + \pi$. I, D, E et FB appartiennent au cercle (Γ').

Conclusion : $I \in (\Gamma)$ et $I \in (\Gamma')$ alors $I \in (\Gamma) \cap (\Gamma')$

c) Montrons que les droites (ID) et (BF) sont perpendiculaires.

(Γ) est le cercle de diamètre [AD], comme $I \in (\Gamma)$, on a $(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{2}$.

D'où, les droites (ID) et (BF) sont perpendiculaires.

4 – Montrons que I est l'image de D par la réflexion d'axe (OO')

I et D sont les points d'intersection de (Γ) et (Γ'), donc I et D sont symétriques par rapport à la droite (OO') passant par les centres.

Partie B : Utilisation des nombres complexes

1- Affixes des points A, B, C, D et G.

$\overrightarrow{DA} = 6\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{DC} = 6\overrightarrow{e_2}$

On a $z_A = 6$; $z_B = 6 + 6i$; $z_C = 6i$; $z_D = 0$ et $z_G = -3$.

2 –a) Expression complexe de la similitude plane directe S

L'écriture complexe de S est de la forme : $z' = a z + b$

On a $S(D) = D$ implique $z_D = az_D + b$

et $S(A) = B$ implique $z_B = az_A + b$

On a résoudre le système :

$$\begin{cases} 0a + b = 0 \\ 6a + b = 6 = 6i \end{cases}$$

Sa résolution donne $a = 1 + i$ et $b = 0$.

D'où l'expression complexe de S est : $z' = (1 + i) z$.

b) Eléments caractéristiques de S.

le rapport $k = |1 + i| = \sqrt{2}$

l'angle $\theta = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4}$

a) Nature et éléments géométriques de f.

L'écriture complexe de f est de la forme : $z' = a\bar{z} + b$ avec $a = \frac{4}{5} + \frac{3}{5}i$.

On a $|a| = \left|\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right| = 1$, f est donc un antidéplacement.

On a $a\bar{b} + b = (\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i)(-\frac{6}{5} - \frac{18}{5}i) + (-\frac{6}{5} + \frac{18}{5}i) = 0$

f est une réflexion

Eléments caractéristiques de f :

Soit D' = f(D), on a $z_{D'} = (-\frac{6}{5} + \frac{18}{5}i)$, alors l'axe de la réflexion f est la médiatrice de[DD'].

Remarque : On vérifie que f(O) = O et f(O') = O'. f est la réflexion d'axe (OO').

b) Expression de x' et y' en fonction de x et y.

On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + i y'$

Alors $(x' + i y') = (\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i)(x - i y) + (-\frac{6}{5} + \frac{18}{5}i)$

L'expression analytique de f est :

$$\begin{cases} x' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - \frac{6}{5} \\ y' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y + \frac{18}{5} \end{cases}$$

c) Affixe z_I du point I tel que f(D) = I.

On a $z_D = 0$ i.e. $x_D = y_D = 0$

D'où $z_I = (-\frac{6}{5} + \frac{18}{5}i)$

d) Vérifions que les points G, I et C sont alignés.

On a $z_{\overrightarrow{GI}} = z_I - z_G = (-\frac{6}{5} + \frac{18}{5}i) - (-3) = \frac{9}{5} + \frac{18}{5}i$

Et $z_{\overrightarrow{GC}} = z_C - z_G = (6i) - (-3) = 3 + 6i$

Donc $z_{\overrightarrow{GI}} = \frac{3}{5} z_{\overrightarrow{GC}}$ i.e. $\overrightarrow{GI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{GC}$

Les points G, I et C sont alignés.