Série C - session 2008 : problème 2 – corrigé

Partie A : Etude de la fonction f_n sur [0 , +∞[.

La fonction f est définie par $f_n'(x) = x\,e^{-\frac{1}{nx}}$ pour $x \geq 0$, et $f_n(0) = 0$.

1 – a) Continuité et dérivabilité de f en 0.

- Continuité en 0 :

Posons $\frac{1}{nx} = X$ (pour $x \to 0^+$, on a $X \to +\infty$)

Alors $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,e^{-\frac{1}{nx}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{nX}e^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{nX\,e^X} = 0$.

D'où $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0)$.

f est donc continue à droite de 0.

- Dérivabilité en 0 :

On a $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{-\frac{1}{nx}} = 0$

f est donc dérivable en 0 et f '(0) = 0.

b) Tableau de variation de f

- dérivée de f : on a $f_n'(x) = (1+\frac{1}{nx})e^{-\frac{1}{nx}}$.

Pour $x \geq 0$, $(1+\frac{1}{nx}) > 0$ d'où $f_n'(x) > 0$

- limite : on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\,e^{-\frac{1}{nx}} = +\infty$

- tableau de variation

x	0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	
$f_n(x)$	0	↗	$+\infty$

2 – a) variation de g sur [0 , +∞[.

La fonction g est définie par $g(u) = e^{-u} + u - 1$.

On a $g'(u) = -e^{-u} + 1$.

Pour $u \in [0,+\infty[$, $1-e^{-u} \geq 0$, i.e $g'(u) \geq 0$, d'où g est croissante.

b) Encadrement de $1-e^{-u}$.

Comme g est croissante sur $[0,+\infty[$, on $g(u) \geq g(0)$ pour tout $u \in [0,+\infty[$; i.e $e^{-u} + u - 1 \geq 0$.

En combinant $1-e^{-u} \geq 0$ et $e^{-u} + u - 1 \geq 0$ on a $0 \leq 1-e^{-u} \leq u$ sur $[0,+\infty[$.

c) Montrons que pour tout réel h de [0,+ ∞ [: $0 \leq e^{-h} + h - 1 \leq \frac{h^2}{2}$.

pour $u \geq 0$, on a $0 \leq 1-e^{-u} \leq u$

en intégrant entre 0 et h (h ≥ 0), on a

$$0 \le \int_0^h (1 - e^{-u})\,du \le \int_0^h u\,du$$

$$0 \le \left[u + e^{-u}\right]_0^h \le \left[\frac{h^2}{2}\right]_0^h$$

D'où $\quad 0 \le e^{-h} + h - 1 \le \frac{h^2}{2}$ pour tout $h \ge 0$

d) montrons que pour x ≥ 0 , $0 \le f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \le \frac{1}{2n^2x}$

Posons pour x > 0, $h = \frac{1}{nx}$,

Alors d'après 2-c) $\quad 0 \le e^{-\frac{1}{nx}} + \frac{1}{nx} - 1 \le \frac{1}{2n^2x^2}$

En multipliant par x (x>0), on a $0 \le xe^{-\frac{1}{nx}} + \frac{1}{n} - x \le \frac{1}{2n^2x}$

D'où $\quad 0 \le f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \le \frac{1}{2n^2x}$ pour tout x> 0

Détermination de la droite (Δ_n) asymptote de (C_n)

On a $\quad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$ et $0 \le \lim_{x\to+\infty} [f_n(x) - (x - \frac{1}{n})] \le \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2n^2x}$.

Comme $\quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2n^2x} = 0$,

on a $\quad 0 \le \lim_{x\to+\infty} [f_n(x) - (x - \frac{1}{n})] \le 0$ i.e. $\lim_{x\to+\infty} [f_n(x) - (x - \frac{1}{n})] = 0$

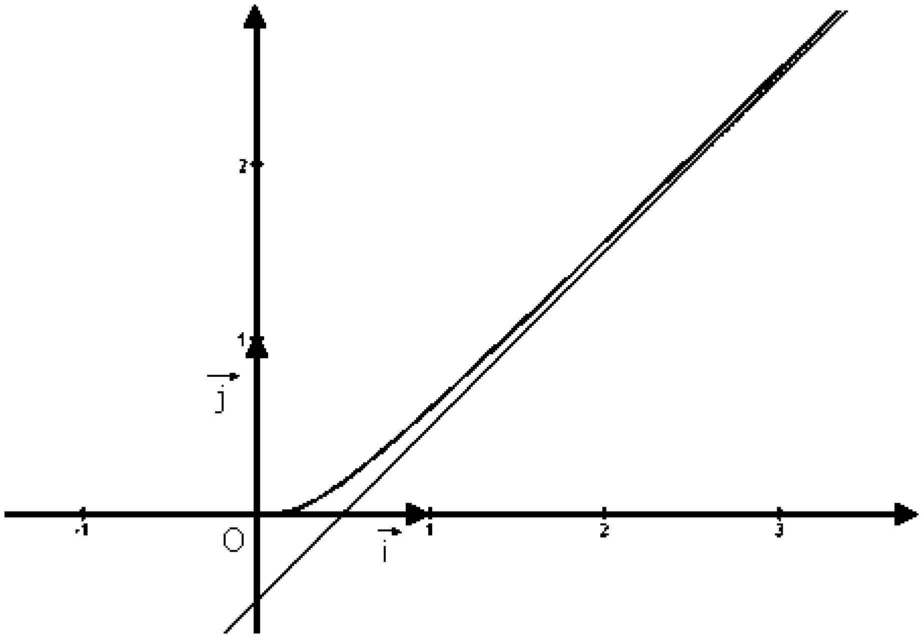
d'où la droite (Δ_n) d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est une asymptote de (C_n).

e) Position relative de (C_n) et (Δ_n)

On a $\quad 0 \le f_n(x) - (x - \frac{1}{n})$ pour tout x> 0

donc (C_n) est au-dessus de (Δ_n).

3 – Tracé de (C_2) et (Δ_2) Unité graphique : 2 cm



Partie B : Etude de la suite (I_n) définie $I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt$

a) Montrons que pour tout réel t de [0 ; 1] : $(t - \frac{1}{n}) \leq f_n(t) \leq t$.

- D'après A-2-d), on a : $t - \frac{1}{n} \leq f_n(t)$ pour tout t de [0 ; 1]

- On a $t - f_n(t) = t(1 - e^{-\frac{1}{nt}})$

Pour tout t de [0 ; 1], $sg\,[t - f_n(t)] = sg(1 - e^{-\frac{1}{nt}})$

Etudions le signe de $(1 - e^{-\frac{1}{nt}})$

On a $1 - e^{-\frac{1}{nt}} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{nt}}}$

Pour t > 0 et n > 0, on a nt > 0 et $e^{\frac{1}{nt}} > 1$, ce qui implique $\frac{1}{e^{\frac{1}{nt}}} < 1$ i.e. $1 - \frac{1}{e^{\frac{1}{nt}}} > 0$

d'où pour $t \to 0$, $(1 - e^{-\frac{1}{nt}}) > 0$, alors $t - f_n(t) > 0$

En conclusion, pour tout réel t de [0 ; 1] : $(t - \frac{1}{n}) \leq f_n(t) \leq t$.

b) Calcul de la limite de (I_n)

On intègre entre 0 et 1 : $\int_0^1 (t - \frac{1}{n})\,dt \leq \int_0^1 f_n(t)\,dt \leq \int_0^1 t\,dt$

$$\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t}{n}\right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1$$

Ce qui implique $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq I_n \leq \frac{1}{2}$

En passant aux limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{1}{2} - \frac{1}{n}) \leq \lim\limits_{n\to+\infty} I_n \leq \frac{1}{2}$

alors $\frac{1}{2} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} I_n \leq \frac{1}{2}$

D'où $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{2}$

Partie C : Résolution de l'équation différentielle(E) : $y' - y = \frac{-x^2 + x + 1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$.

1- Résolution de (E') : y' – y = 0

C'est une équation homogène du premier ordre de la forme ay' + by = 0. L a solution générale est :

$y = k\,e^x$ où k est une constate arbitraire

2-a) Vérifions que f est une solution de (E)

On a : $f(x) = x\,e^{-\frac{1}{x}}$

sa dérivée $f'(x) = (1 + \frac{1}{x})\,e^{-\frac{1}{x}}$

alors $f'(x) - f(x) = (1 + \frac{1}{x} - x)\,e^{-\frac{1}{x}}$

ce qui implique $f'(x) - f(x) = (\frac{-x^2+x+1}{x})\,e^{-\frac{1}{x}}$

f est donc une solution particulière de (E)

b) montrons que (φ + f) est solution de (E) si et seulement si φ est solution de (E').

-Supposons que (φ + f) est solution de (E)

alors $(\varphi + f)' - (\varphi + f) = (\frac{-x^2+x+1}{x})\, e^{-\frac{1}{x}}$

i.e. $(\varphi' - \varphi) + (f' - f) = (\frac{-x^2+x+1}{x})\, e^{-\frac{1}{x}}$

comme f est solution de (E), on a $\varphi' - \varphi = 0$.

φ est solution de (E ').

- réciproquement, supposons que φ est solution de (E ')

On a : $\varphi' - \varphi = 0$

de plus : $f'(x) - f(x) = (\frac{-x^2+x+1}{x})\, e^{-\frac{1}{x}}$

en additionnant membre à membre, on a :

$$(\varphi + f)' - (\varphi + f) = (\frac{-x^2+x+1}{x})\, e^{-\frac{1}{x}}$$

D'où (φ + f) est solution de (E)

Conclusion : (φ + f) est solution de (E) si et seulement si φ est solution de (E').

c) solution générale de (E)

Comme $\varphi(x) = k\, e^x$ et $f(x) = x\, e^{-\frac{1}{x}}$,

La solution de (E) est : $x \mapsto x\, e^{-\frac{1}{x}} + k\, e^x$ où k est une constate arbitraire