Série C - session 2009 : problème 2 – corrigé

Partie A Etude de la fonction f

1. a) Tableau de variation de $g : x \mapsto g(x) = 1-(x^2-2x+2)e^{-x}$

•Ensemble de définition de g : g est définie sur $]-\infty;+\infty[$

•Limites de g

On a $\lim\limits_{-\infty} g = \lim\limits_{-\infty} (-x^2e^{-x}) = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = 1-0 = 1$

•Dérivée g' de g : On vérifie que $g'(x) = (x-2)^2.e^{-x}$,

$g'(x)$ positive ou nulle sur R

•Tableau de variation

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g '			+		
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

b) Existence et unicité de la solution de l'équation g(x) = 0

•g est continue et strictement croissante sur $]-\infty,+\infty[$, donc c'est une bijection de $]-\infty,+\infty[$ sur $g(]-\infty,+\infty[) =]-\infty; 1[$.

Comme $0 \in]-\infty; 1[$., il existe un réel unique α dans $]-\infty,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

•Encadrement de α

On a $g(0,35) = -0,0024$ et $g(0,36) = 0,0166$

Comme $[0,35;0,36] \subset R$ et $g(0,35) \times g(0,36) < 0$, alors $\alpha \in]0,35 ; 0,36[$

c) Signe de g(x)

Sur $]-\infty,\alpha]$, la fonction g est continue et strictement croissante donc $g(x) \le g(\alpha)$.

Comme $g(\alpha) = 0$, il s'ensuit que $g(x) < 0$ sur $]-\infty,\alpha[$

Sur $[\alpha,+\infty[$, g continue strictement croissante donc $g(x) \ge g(\alpha) = 0$ alors $g(x) > 0$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
g(x)		-	0	+	

2. a) Expression de f'(x)

•On a $f(x) = x-1+(x^2+2)e^{-x}$, f est définie sur R

•On a $f'(x) = 1+2xe^{-x}+(x^2+2)(-e^{-x})$

Alors $f'(x) = 1-(x^2-2x+2)e^{-x} = g(x)$

D'où $sg\,[f'(x)] = sg\,[g(x)]$

b) Tableau de variation de f

•On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 e^{-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} [\ x - 1 + (x^2 + 2)\,e^{-x}] = +\infty$

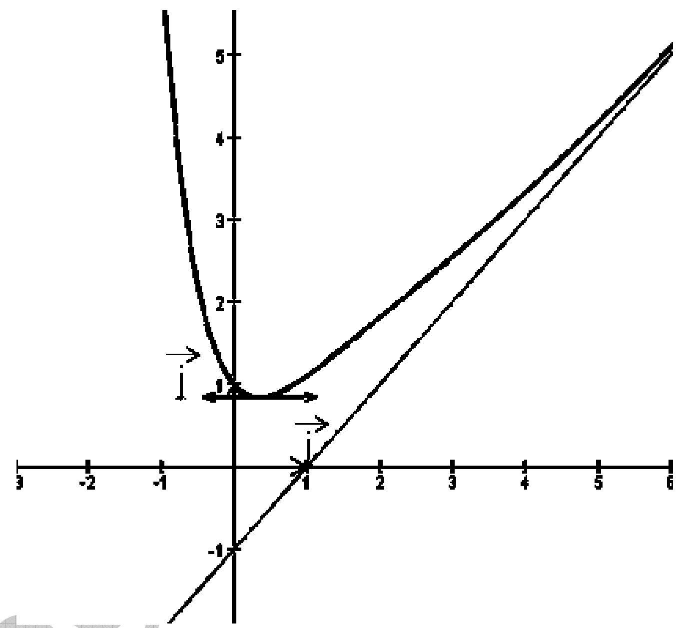
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Droite asymptote

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x-1)] = \lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 2)\,e^{-x} = 0$

D'où la courbe C de f admet une asymptote oblique d'équation y = x – 1

d) Courbe (unité graphique : 2 cm)



B. Etude d'une suite

1. a) Variation de h sur l'intervalle $I = [1\,;2]$

•On a $h(x) = f(x) - x = -1 + (x^2 + 2)\,e^{-x}$

La dérivée de h est : $x \mapsto h'(x) = (-x^2 + 2x - 2)e^{-x}$

Comme $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in I$, on a $sg[h'(x)] = sg\,[-x^2 + 2x - 2]$

On vérifie que $-x^2 + 2x - 2 < 0$ pour $x \in I$

D'où $h'(x) < 0$, donc h strictement décroissante sur I

•Tableau de variation de h.

$h(1) \approx 0{,}104$ et $h(2) \approx -0{,}188$

x	1	2
$h'(x)$	$-$	
$h(x)$	$0,104$ ↘	$-0,188$

b) Solution de f(x) = x (existence et unicité)
L'équation f(x) = x équivaut à f(x)-x = 0 ie. h(x) = 0, donc les équations f(x) = x et h(x) =0 ont le même ensemble de solutions.
La fonction h est continue strictement décroissante sur I = [1 ; 2] et $h(1)\times h(2) < 0$ (h(1) et h(2) sont de signes contraires), alors il existe un unique réel β, $\beta \in \left]1;2\right[$ tel que $h(\beta) = 0$
On a $h(\beta) = 0$ équivaut à $f(\beta) = \beta$ donc β est solution unique de f(x) = x

2. Encadrement de f '(x) sur I
On a $f'(x) = g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$.
La fonction g est continue strictement croissante sur I. (question A.1-a) alors pour tout x, $(1 \le x \le 2)$, on a : $g(1) \le g(x) \le g(2)$.
On a $g(1) \approx 0,632$ et $g(2) \approx 0,729$
D'où $0,632 \le g(x) \le 0,729$ i.e $|g(x)| \le 0,75$
Donc $|f'(x)| \le 0,729 \le \frac{3}{4}$ sur l'intervalle I
3. a) Montrons, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$ **;** $U_n \in I$
(U_n) est définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$
• $U_0 = 1$ alors $U_0 \in I$
• Supposons que $U_n \in I$ est montrons que $U_{n+1} \in I$
D'abord, montrons que pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$
La fonction f est croissante sur I donc $f(I) = [f(1);f(2)]$
On a f(1) = 1,104 et f(2) = 1,812
Donc $f(1) \in I$ et $f(2) \in I$ d'où $[f(1);f(2)] \subset I$, D'où pour tout $x \in I$, $f(x) \in I$.
Alors $U_n \in I$ implique $U_{n+1} = f(U_n) \in I$ d'où $U_{n+1} \in I$
Remarque : on peut conclure que (U_n) existe pour tout n.

b) Montrons que, pour tout entier n, $|U_{n+1} - \beta| \le \frac{3}{4}|U_n - \beta|$
Utilisons le théorème des inégalités des accroissements finis.
On a $|f'(x)| \le \frac{3}{4}$ sur I, alors pour tous réels a, b $\in$ I, $|f(b) - f(a)| \le \frac{3}{4}|b - a|$
Prenons $b = U_n$ et $a = \beta$, alors $|f(U_n) - f(\beta)| \le \frac{3}{4}|U_n - \beta|$
Comme $f(\beta) = \beta$ et $f(U_n) = U_{n+1}$, on a $|U_{n+1} - \beta| \le \frac{3}{4}|U_n - \beta|$
• On a successivement

$$|U_1 - \beta| \le \frac{3}{4}|U_0 - \beta|$$

$$|U_2 - \beta| \le \frac{3}{4}|U_1 - \beta|$$

...

$$\left| U_n - \beta \right| \leq \frac{3}{4} \left| U_{n-1} - \beta \right|$$

En multipliant membre à membre et après simplification, on a : $\left| U_n - \beta \right| \leq (\frac{3}{4})^n \left| U_0 - \beta \right|$

c) Limite de U_n

On a $$0 \leq \lim_{n \to +\infty} \left| U_n - \beta \right| \leq \lim_{n \to +\infty} (\frac{3}{4})^n \left| U_0 - \beta \right|$$

Comme $\lim \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} \left| U_n - \beta \right| = 0$

D'où $$\lim_{+\infty} U_n = \beta$$

4. Valeur de p, telle que $\left| U_n - \beta \right| \leq 10^{-2}$

Pour que $\left| U_n - \beta \right| \leq 10^{-2}$, il suffit que $\left(\frac{3}{4}\right)^n \left| U_0 - \beta \right| \leq 10^{-2}$

Comme U_0 et $\beta \in [1;2]$ alors $\left| U_0 - \beta \right| \leq \left| 2 - 1 \right| = 1$

Donc $\left| U_n - \beta \right| \leq 10^{-2}$ lorsque $(\frac{3}{4})^n \leq 10^{-2}$

$$\ln\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \ln(10^{-2}) \quad \text{i.e} \quad n\ln(\frac{3}{4}) \leq \ln 10^{-2}$$

D'où $$n \geq \frac{\ln 10^{-2}}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} = 16{,}008 \quad (p = 17)$$

Pour $n \geq 17$, $\left| U_n - \beta \right| \leq 10^{-2}$