Série C - session 2000 : problème – corrigé

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [0 ; + ∞[par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = x\ln x + (1 - x)\ln(1 - x) \quad \text{si} \quad x \in]0\,;1[\\ f(x) = \dfrac{x-1}{e^x - x - 1} \quad \text{si} \quad x \in [1\,;+\infty[\end{cases}$$

De courbe (*C*) dans un repère orthonormé $(O\,;\ \vec{i},\vec{j})$, d'unité 5 cm.

Partie A

1. Soit g la fonction définie sur] 0 ; 1 [par : g(x) = ln x – ln (1 – x).

a. Résolution de l'équation g(x) = 0.

$\ln x - \ln(1 - x) = 0$ si $x = 1 - x$, c'est à dire $x = \frac{1}{2}$

b. Déduction , suivant les valeurs de x, du signe de g(x).

$g(x) > 0$ si $x > \frac{1}{2}$ et $g(x) < 0$ si $x < \frac{1}{2}$

c. Montrons que pour tout x ∈] 0 ; 1 [, f ' (x) = g(x).

Pour tout $x \in]0\,;1[$, on a $f'(x) = \ln x + 1 + \ln(1 - x) - \frac{1-x}{1-x}$

D'où $f'(x) = \ln x - \ln(1 - x) = g(x)$

2. h la fonction définie sur [1 ; + ∞ [par : h(x) = (2 – x) e^x - 2.

a. Montrons que h est strictement décroissante sur [1 ; + ∞ [.

$h'(x) = -e^x + (2 - x)e^x = (1 - x)e^x$.

Or, pour tout $x \in]0\,;1[$, $(1 - x)$ est négatif donc, h'(x) l'est aussi. Par conséquent, h est strictement décroissante.

b. Solution unique α ∈] $\frac{3}{2}$; 2 [de l'équation h (x) = 0

h est une fonction continue strictement décroissante sur l'intervalle [1 ; + ∞ [; en particulier, elle l'est sur $]\frac{3}{2}\,;2[$. De plus, $h(2) = -2 < 0$ et $h(\frac{3}{2}) = \frac{e\sqrt{e}}{2} - 2 > 0$. Il s'ensuit que l'équation h (x) = 0 admet une solution unique $\alpha \in]\frac{3}{2}\,;2[$.

c. Déduction , suivant les valeurs de x, du signe de h (x).

$h(x) > 0$ si $x \in [1\,;\alpha[$, et $h(x) < 0$ si $x \in]\alpha\,;+\infty[$.

d. Montons que pour tout x > 1, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(e^x - x - 1)^2}$.

$$f'(x) = \frac{(e^x - x - 1) - (e^x - 1) - (x - 1)}{(e^x - x - 1)^2} = \frac{(2-x)e^x - 2}{(e^x - x - 1)^2}$$

Ainsi, $f'(x) = \dfrac{h(x)}{(e^x - x - 1)^2}$.

3. a. Montrons que f est continue en 0

On a f (0) = 0 et $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x\ln x + (1\ \ x)\ln(1\ \ x)) = 0$

Montrons que f est continue en 1 .

On a f (1) = 0 et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x\ln x + (1\ \ x)\ln(1\ \ x)) = 0$

b. Montrons que, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

$$\lim_{0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{0^+} \frac{x\ln x + (1-x)\ \ln(1-x)}{x} = \lim_{0^+} \left\lfloor \ln x + \frac{(1-x)\ \ln(1-x)}{x} \right\rfloor = -\infty$$

Montrons que, $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)}{x-1} = +\infty$

$$\lim_{1^-} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{1^-} \frac{x\ln x + (1-x)\ \ln(1-x)}{x-1} = \lim_{1^-} \left\lfloor \frac{x\ln x}{x-1} - (1-x)\ \ln(1-x) \right\rfloor = +\infty$$

Montrons que $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{f(x)}{x-1} = \dfrac{1}{e-2}$.

$$\lim_{1^+} \frac{f(x)}{x-1} = \lim_{1^+} \frac{x-1}{(x-1)(e^x - x - 1)} = \frac{1}{e-2}$$

Interprétation graphique de ces résultats.

- f n'est pas dérivable à droite au point d'abscisse 0 et sa courbe y admet une demi-tangente verticale.
- f n'est pas dérivable à gauche au point d'abscisse 1 et sa courbe y admet une demi-tangente verticale.
- f est pas dérivable à droite au point d'abscisse 1 et sa courbe y admet une demi-tangente de pente égale à $\dfrac{1}{e-2}$.

b. Montrons que (*C*) admet une asymptote horizontale

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{e^x - x - 1} = 0$. Donc l'axe x'Ox est une asymptote horizontale à (***C***) au voisinage de + ∞.

4. a. Montrons que $f(\alpha) = -1 + \dfrac{2}{\alpha}$

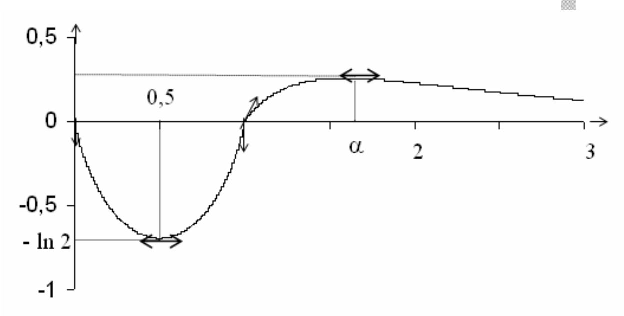
On a h (α) = 0, donc, (2 – α) e^α – 2 = 0 ; c'est à dire $e^\alpha = \dfrac{2}{2-\alpha}$

Par conséquent, $f(\alpha) = \dfrac{\alpha - 1}{\dfrac{2}{2-\alpha} - \alpha - 1} = \dfrac{2-\alpha}{\alpha} = -1 + \dfrac{2}{\alpha}$

Tableau de variation de f sur [0 ; + ∞ [:

x	0		$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
f '(x)	‖	-	0	+	‖	+	0	-	
f (x)	0	↘	-ln2	↗	0	↗	$-1+\frac{2}{\alpha}$	↘	0

b. Traçage de (*C*) sur l'intervalle [0 ; 3]



Partie B

$\alpha \in \left] \frac{3}{2} \right.$; 2 [, le réel déterminé dans la question 2.b. de la partie A

1. Pour tout n ∈ IN*, on pose $I_n(\alpha) = \int_1^{\alpha} \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt$.

a. Montrons que : $0 \le I_1(\alpha) \le \frac{(2-\alpha)(\alpha-1)}{\alpha}$.

On a $I_n(\alpha) = \int_1^{\alpha} \frac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt = \int_1^{\alpha} f(t)\, dt$. Or t ∈ [1 ; α] et f est croissante sur l'intervalle [1 ; α], par conséquent, 1 < t < α.

Il s'ensuit que, $0 < \int_1^{\alpha} f(t)\, dt. < \int_1^{\alpha} (-1+\frac{2}{\alpha})\, dt$.

On en conclut que $0 \le I_1(\alpha) \le \frac{(2-\alpha)(\alpha-1)}{\alpha}$.

a. Etude du sens de variation de : t $\mapsto e^t - t - 1$ sur [1 ; + ∞ [

Sa fonction dérivée est : t $\mapsto e^t - 1$. Or si $t \ge 1$, $e^t - 1 > 0$.Ainsi, cette fonction est strictement croissante sur l'intervalle [1 ; + ∞ [

Déduction de : pour tout $t \ge 1$, $e^t - t - 1 \ge e - 2$.

Puisque tout $t \geq 1$, la fonction : $t \to e^t - t - 1$ est croissante donc pour tout $t \geq 1$, $e^t - t - 1 \geq e - 2$

b. Montrons alors que $0 \leq I_n(\alpha) \leq \dfrac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)-(e-2)}$.

Pour tout $t \geq 1$, $(t - 1) \geq 0$ donc $(t - 1)^n \geq 0$. Du plus, $e^t - t - 1 \geq 0$.

Ainsi, $\dfrac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} \geq 0$. Or $\alpha \geq 1$, donc $I_n(\alpha)$ c ≥ 0.

Et , d'après la question précédente, pour $t \geq 1$, $e^t - t - 1 \geq e - 2$ par conséquent, $\dfrac{1}{e^t - t - 1}$

$\leq \dfrac{1}{e - 2}$. Ainsi, $\dfrac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} \leq \dfrac{(t-1)^n}{e - 2}$.

Il s'ensuit que $\int_1^\alpha \dfrac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} \leq \int_1^\alpha \dfrac{(t-1)^n}{e - 2} dt = \dfrac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)-(e-2)}$.

On en conclut que $0 \leq I_n(\alpha) \leq \dfrac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)-(e-2)}$.

c .Montrons que la suite $(I_n(\alpha))$ est convergente.

La suite $(I_n(\alpha))$ est minorée. Ainsi, pour montrer qu'elle est convergente, il reste à montrer qu'elle est décroissante.

Or $I_{n+1}(\alpha) - I_n(\alpha) = \int_1^\alpha \dfrac{(t-1)^{n+1}}{e^t - t - 1} dt - \int_1^\alpha \dfrac{(t-1)^n}{e^t - t - 1} dt$

$= \int_1^\alpha \dfrac{(t-1)^{n+1} - (t-1)^n}{e^t - t - 1} dt$

$= \int_1^\alpha \dfrac{(t-1)^n (t-2)}{e^t - t - 1} dt$

Or, $t > 1$ donc $(t - 1)^n > 0$. Et, $t < \alpha$ avec $\alpha < 2$, donc $(t - 2) < 0$

De plus, $e^t - t - 1 \geq 0$.

Il s'ensuit que $\int_1^\alpha \dfrac{(t-1)^n (t-2)}{e^t - t - 1} dt < 0$

Précision de la limite de la suite $(I_n(\alpha))$:

D'après la question c. précédente, $0 \leq I_n(\alpha) \leq \dfrac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)-(e-2)}$,

ainsi, $0 \leq \lim I_n(\alpha) \leq \lim \dfrac{(\alpha-1)^{n+1}}{(n+1)-(e-2)} = 0$

Il s'ensuit que la limite de la suite $(I_n(\alpha))$ est égale à 0.

2. Soient a et b deux réels strictement positifs tels que a + b = 1.

a. Montrons que pour tout x $\in$] 0 ; 1 [, a ln $\frac{1}{a} + b$ ln $\frac{1}{b}$ $\leq$ ln 2

Pour x $\in$] 0 ; 1 [, x ln x + (1-x)ln (1 – x) $\geq$ – ln 2 car f (x) est supérieure ou égale à - ln 2. Or, a + b = 1, donc b = 1 – a .

Ainsi, a ln a + b ln b $\geq$ – ln 2. Par conséquent, - a ln a – b ln b $\leq$ ln 2

Il s'ensuit que a ln $\frac{1}{a} + b$ ln $\frac{1}{b}$ $\leq$ ln 2

b. Valeurs de a et b, telle quela dernière inégalité soit une égalité

a ln $\frac{1}{a} + b$ ln $\frac{1}{b}$ =- ln 2 si a ln a + (1 – a) ln (1 – a) = - ln 2 c'est à dire si f (a) = - ln 2 donc si a = $\frac{1}{2}$; par conséquent, les valeurs de a et de b pour que la dernière inégalité soit une égalité sont a = b = $\frac{1}{2}$.