Série C - session 2000 : exercice 1 – corrigé

ABC triangle isocèle et rectangle en A. On note par :
I le milieu du segment [BC] ;
r_B la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$;
$g = t \circ r_B$ et $f = r_C \circ g$.

1. Méthode complexe : $R = (A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ repère orthonormé

a. Détermination de z_A , z_B , z_C et z_I affixes respectives de A, B, C et I :

$z_A = 0$ $z_B = 1$, $z_C = i$ et $z_I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

b. Expression complexe de f.

On note T, R_B et R_C les applications complexes associées respectivement aux transformations affines t, r_B, et r_C.

- Expression complexe de r_B : $z' = iz + 1 - i$
- Expression complexe de t : $z' = z - 1 + i$
- Expression complexe de r_C : $z' = iz + 1 + i$

Par conséquent, l'expression complexe de f est :

$z' = (R_C \circ T \circ R_B)(z)$
$= (R_C \circ T)[R_B(z)]$
$= (R_C \circ T)[iz + 1 + i]$
$= R_C[T(iz + 1 + i)]$
$= R_C[iz + 1 - i - 1 + i]$
$= R_C(iz)$
$= i(iz) + 1 + i$
$= - z + 1 + i$

Il s'ensuit que f : $z' = - z + 1 - i$

c. Nature de f.

L'expression complexe de f est de la forme $z' = az + b$ avec $a = -1$ qui est un nombre réel. Ainsi, f est une homothétie.

Eléments caractéristiques de f.

- Le rapport de f est $k = - 1$
- Le centre de f est le point d'affixe z vérifiant $z = - z + 1 - i$. Ainsi, $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

Par conséquent, le centre de f n'est autre que le point I.

2. Méthode géométrique :

a. Caractérisation de g en décomposant t et r_B en deux symétries orthogonales.

Soient : - (D) la droite passant par B telle que (D) $\perp$ BC

- (δ) la droite telle que (δ) est le transformé de (D) par la translation de vecteur $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Donc, δ = (IB).

Par conséquent, $t = S_\delta \circ S_D$ où S_δ est la réflexion d'axe (δ) et S_D est la réflexion d'axe (D).

Soit (δ') la droite passant par B telle que $(\delta', D) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$.

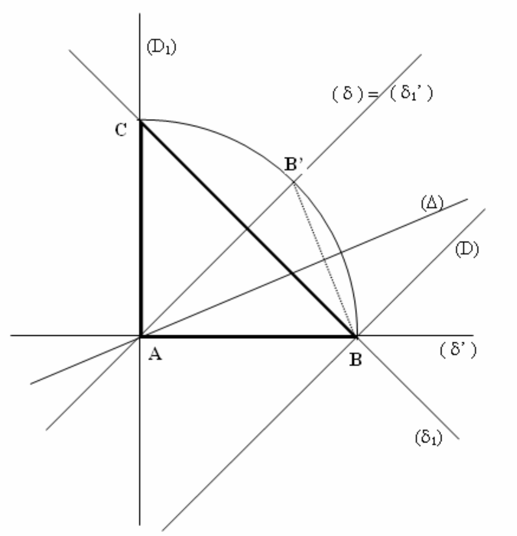
Donc (δ') = (AB).

Par conséquent, $r_B = S_D \circ S_{\delta'}$

Il s'ensuit que $g = t \circ r_B = S_\delta \circ S_D \circ S_D \circ S_{\delta'} = S_\delta \circ S_{\delta'}$

De plus, ($\delta \cap \delta'$) = A, par conséquent g est la rotation de centre A et d'angle

$\theta = 2(\delta', \delta) = 2(\delta', D) = \frac{\pi}{2}$.



b. Caractérisation de f en décomposant g et r_C en deux symétries orthogonales.

g étant la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et r_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soient : - (D_1) la droite (AC)

- (δ_1) la droite passant par C telle que

$(D_1, \delta_1) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$. Donc δ_1 = (BC). Ainsi, $r_C = S_{\delta_1} \circ S_{D_1}$ où S_{δ_1} et S_{D_1} sont les réflexions d'axes respectives (δ_1) et (D_1).Donc (δ') = (AB) .

Soit (δ_1') la droite passant par A telle que

$(\delta_1', D_1) = \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$. Donc (δ_1') = δ. Ainsi, $g = S_{D_1} \circ S_{\delta_1'}$ où $S_{\delta_1'}$ est la réflexion d'axe δ_1'.

Il s'ensuit que $f = r_C \circ g = S_{\delta_1} \circ S_{\Delta_1} \circ S_{D_1} \circ S_{\delta_1'} = S_{\delta_1} \circ S_{\delta_1'}$

De plus (δ_1') $\cap$ (δ_1) = I, par conséquent, f est la rotation de centre I et d'angle

$2(\delta_1', \delta_1) = 2(BC, IA) = \pi$.

3. S la similitude plane indirecte de centre A avec S (B) = I.

a. Détermination du rapport de S.

Le rapport de S est $k = \frac{AI}{AB}$. Or 2 AI² = AB², donc, $2\,AI = \sqrt{2}\,AB$. Il s'ensuit que $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b. (*C*) le cercle de centre A et passant par B et [AI) ∩ (*C*) = B'. Montrons qu'il existe une symétrie orthogonale σ d'axe (Δ) qui transforme B en B'.

Du fait que B et B' appartiennent au cercle (***C***) alors le triangle ABB' est isocèle. Par conséquent, la hauteur issue du point A n'est autre que la médiatrice du segment [BB'] .

Soit σ la symétrie orthogonale par rapport à la droite (Δ), avec (Δ) la hauteur du triangle ABB' issue de A, alors, σ (B) = B'.

Déterminons alors l'axe de S.

On a AB' = AB, donc $\frac{AI}{AB'} = \frac{AI}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Par conséquent, $AI = \frac{\sqrt{2}}{2}AB' = \frac{\sqrt{2}}{2}A\,\sigma(B)$.

Il s'ensuit que l'axe de S n'est autre que l'axe de σ ; donc, c'est la hauteur du triangle ABB' issue du point A