Série C - session 2010 : problème 2 – corrigé

Partie I : A - Etude de la fonction f

1) Ensemble de définition de f

f est définie par $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln(x)}$ si $0<x<1$, $f(0)=0$ et $f(1)=1$

Comme $x\mapsto\dfrac{1}{\ln x}$ est définie sur $]0;1[$, alors $D_f=[0,1]$

2) Continuité de f en 0 et en 1

Rappel : f est continue en $x_0=0$ si $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)$

On a $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(x-1)}{\ln x}=0$ et $f(0)=0$, donc f est continue en 0

Pour l'étude de la continuité en 1, calculons $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)$

On a $f(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}=\dfrac{1}{\dfrac{\ln x}{x-1}}$

Soit la fonction $g: x\mapsto \ln x$, g est dérivable en $x_0=1$, et $g'(1)=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\ln x-\ln 1}{x-1}$

or $g'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $g'(1)=1$ d'où $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\dfrac{1}{\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\ln x}{x-1}}=1$,

Comme $f(1)=1$, alors f est continue en 1

3) Dérivabilité de f sur $]0,1[$

Les fonctions $x\mapsto x-1$ et $x\mapsto\ln x$ sont dérivables sur $]0,1[$ et ln ne s'annule pas sur $]0,1[$,
Comme f est le quotient de 2 fonctions dérivables alors f est dérivable sur $]0,1[$

Expression de $f'(x)$

on a $f'(x)=\dfrac{(x-1)'\ln x-(x-1)(\ln x)'}{(\ln x)^2}=\dfrac{\ln x-(x-1)\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$

d'où $f'(x)=\dfrac{1}{(\ln x)^2}\left[\ln(x)-1+\dfrac{1}{x}\right]=\dfrac{H(x)}{(\ln x)^2}$

4) Variation et signe de H

- Etude de la variation de $x\mapsto H(x)=\dfrac{1}{x}-1+\ln x$ sur $]0,1]$,

on a $H'(x)=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x^2}$

On a $sg(H'(x))=sg(x-1)$.

D'où pour tout $x \in]0;1]$, $(x-1) < 0$ ce qui implique $H'(x) \leq 0$ sur $]0,1]$.
Donc H est strictement décroissante sur $]0,1]$,
- Signe de H(x) sur $]0,1]$
Comme H est décroissante sur $]0,1]$, on a pour tout $x \in]0;1]$, $H(x) \geq H(1)$, or $H(1) = 0$
D'où $H(x) \geq 0$ sur $]0;1]$
- Sens de variation de f
On a $f'(x) = \dfrac{H(x)}{(\ln x)^2}$; comme $(\ln x)^2 \geq 0$ sur $]0,1]$ donc $sg[f'(x)] = sg[H(x)]$
Or $H(x) \geq 0$ sur $]0;1]$ donc $f'(x) \geq 0$. D'où f est strictement croissante sur $]0;1]$

5) Etude de la dérivabilité de f en $x_0 = 0$
Rappel : f est dérivable en $x_0=0$ si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie.
On a $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x-1}{x\ln x} = +\infty$
D'où f n'est pas dérivable en $x_0 = 0$
Remarque : la courbe (C) admet une tangente verticale en $x_0 = 0$

B - 1) Montrons que pour $a \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$
On a $0 \leq \dfrac{1}{1-a} - (1+a) \leq 2a^2$
- On a : $\dfrac{1}{1-a} - (1+a) = \dfrac{a^2}{1-a}$; comme $a^2 \geq 0$ et $1-a > 0$ sur $\left[0,\frac{1}{2}\right[$, alors $\dfrac{a^2}{1-a} \geq 0$
- Pour $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$, on a : $-\frac{1}{2} \leq -a \leq 0$ et $\frac{1}{2} \leq 1-a \leq 1$, ce qui implique $1 \leq \dfrac{1}{1-a} \leq 2$.
D'où $\dfrac{a^2}{1-a} \leq 2a^2$ i.e $\dfrac{1}{1-a} - (1+a) \leq 2a^2$
Conclusion : pour tout $a \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, on a $0 \leq \dfrac{1}{1-a} - (1+a) \leq 2a^2$.
- Montrons que pour tout $a \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$; $0 \leq -\ln(1-a) - (a + \dfrac{a^2}{2}) \leq \dfrac{2a^3}{3}$
Les fonctions $t \mapsto \dfrac{1}{1-t} - (1+t)$ et $t \mapsto 2t^2$ sont continues sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, alors pour tout
$t \in \left[0;\frac{1}{2}\right]$, $\dfrac{1}{1-t} - (1+t) \leq 2t^2$ implique $0 \leq \displaystyle\int_0^a [\frac{1}{1-t} - (1+t)]\,dt \leq \int_0^a 2t^2 dt$
$$0 \leq \left[-\ln(1-t) - (t + \frac{t^2}{2})\right]_0^a \leq \left[2\frac{t^3}{3}\right]_0^a$$
D'où $0 \leq -\ln(1-a) - (a + \dfrac{a^2}{2}) \leq 2\dfrac{a^3}{3}$ pour $a \in \left[0,\frac{1}{2}\right]$.

2) Montrons que pour tout $b \in \left[-\frac{1}{2};0\right]$; $0 \le \psi(1+b) - \psi(1) + \frac{b}{2} \le 2\frac{b^2}{3}$

La fonction Ψ est définie par $\psi(t) = \dfrac{1}{f(t)} = \dfrac{\ln t}{t-1}$ pour $t \in \left]0;1\right]$

Pour tout $b \in [-\frac{1}{2};0]$, $\frac{1}{2} < 1+b \le 1$ ce qui implique $(1+b) \in \left]0,1\right]$, donc $\psi(1+b)$ est bien définie.

Alors
$$\psi(1+b) - \psi(1) + \frac{b}{2} = \frac{1}{f(1+b)} - \frac{1}{f(1)} + \frac{b}{2} = \frac{\ln(1+b)}{(1+b)-1} - \frac{1}{1} + \frac{b}{2}$$
$$= \frac{\ln(1+b)}{b} - 1 + \frac{b}{2}$$
$$= \frac{1}{b}\left[\ln(1+b) - b + \frac{b^2}{2}\right]$$

On pose $b = -a$ $\quad (a \in [0,\frac{1}{2}]$), alors on a :
$$\psi(1+b) - \psi(1) + \frac{b}{2} = -\frac{1}{a}\left[\ln(1-a) + a + \frac{a^2}{2}\right] = \frac{1}{a}\left[-\ln(1-a) - (a + \frac{a^2}{2})\right]$$

D'après la question B-1) : $0 \le \left[-\ln(1-a) - (a + \frac{a^2}{2})\right] \le \dfrac{2a^3}{3}$

On a $0 \le \dfrac{1}{a}\left[-\ln(1-a) - (a + \frac{a^2}{2})\right] \le \dfrac{2a^2}{3}$ i.e $0 \le \psi(1+b) - \psi(1) + \dfrac{b}{2} \le \dfrac{2}{3}b^2$

- Montrons que ψ est dérivable en 1

pour $b \in \left[-\frac{1}{2};0\right[$; $0 \le \psi(1+b) - \psi(1) + \frac{b}{2} \le \frac{2}{3}b^2$

en divisant par b $(b \ne 0)$ on a $\dfrac{2}{3}b \le \dfrac{\psi(1+b) - \psi(1)}{b} + \dfrac{1}{2} \le 0$

En passant aux limites on a : $\lim\limits_{b \to 0} \dfrac{2}{3}b \le \lim\limits_{b \to 0} \dfrac{\psi(1+b) - \psi(1)}{b} + \dfrac{1}{2} \le 0$

Or, par définition, $\lim\limits_{b \to 0} \dfrac{\psi(1+b) - \psi(1)}{b} = \psi'(1)$; alors $0 \le \psi'(1) + \dfrac{1}{2} \le 0$ d'où $\psi'(1) = -\dfrac{1}{2}$

3) Dérivabilité de f en 1

ψ est dérivable en 1 et $\psi'(1) \ne 0$ alors $f = \dfrac{1}{\psi}$ est dérivable en 1

- Calcul de $f'(1)$

On a $\quad f(x) = \dfrac{1}{\psi(x)}$

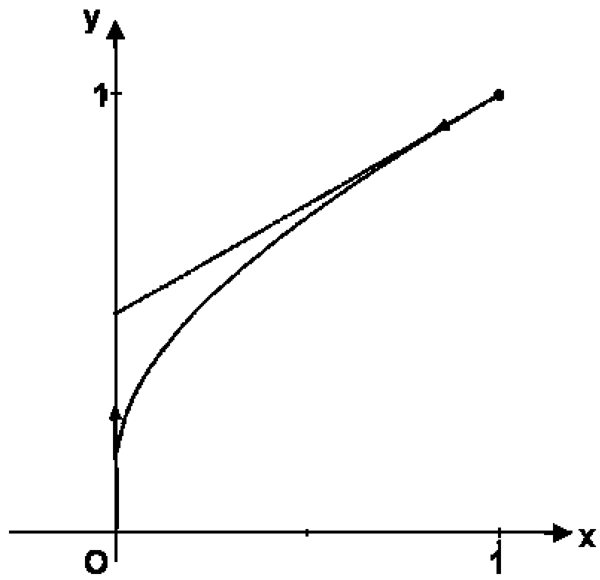
Alors $\quad f'(1) = -\dfrac{\psi'(1)}{[\psi(1)]^2}$ avec $\psi'(1) = \dfrac{1}{2}$ et $\psi(1) = \dfrac{1}{f(1)} = 1$

d'où $\quad f'(1) = \dfrac{1}{2}$

- Tangente en $x_0 = 1$ $\quad$ (T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

On a $\quad (T) : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

4) Courbe (*C*) et tangente (T)



Partie II : Etude de la suite (a_n) définie par $a_n = \frac{n^n}{n!}$

1) Etude de la monotonie de (a_n)

On a $\quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$,

alors $\quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n > 1$

Donc $\quad a_n > 0$ et $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

D'où la suite (a_n) est croissante.

2) Montrons que $2 \leq (1+\frac{1}{n})^n \leq e$ pour $n \in N^*$

- On a $\quad 1 + nx \leq (1+x)^n$.

Pour $x = \frac{1}{n}$, $\quad$ on a $1 + n.\frac{1}{n} \leq (1+\frac{1}{n})^n$; d'où $2 \leq (1+\frac{1}{n})^n$

- On a $\ln(1+x) \leq x$, ce qui implique $1 + x \leq e^x$

pour $x = \frac{1}{n}$, on a $1 + \frac{1}{n} \leq e^{1/n} \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n \leq (e^{1/n})^n = e$.

D'où $\quad 2 \leq (1+\frac{1}{n})^n \leq e$ pour $n \in N^*$.

3) Démontrons que pour tout $n \geq 6;\ \ 2^n \leq a_n \leq e^n$

Pour n = 6 ; $2^6 = 64;\ a_6 = 64{,}8$ et $e^6 = 403{,}43 \Rightarrow 2^6 \leq a_6 \leq e^6$

Supposons que pour le rang n (n > 6) : $2^n \leq a_n \leq e^n$

On a $\quad a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n a_n$ (d'après partie II 1°)

et $\quad 2 \leq (1+\dfrac{1}{n})^n \leq e$ (d'après question 2)

puis $\quad 2^n \leq a_n \leq e^n$ (d'après l'hypothèse de récurrence)

En multipliant membre à membre, on a $2^{n+1} \leq (1+\dfrac{1}{n})^n a_n \leq e^{n+1}$

D'où $\quad 2^{n+1} \leq a_{n+1} \leq e^{n+1}$ donc c'est vraie pour (n+1)

Conclusion $\quad$ pour $n \geq 6,\quad 2^n \leq a_n \leq e^n$.