Série C - session 2010 : problème 1 – corrigé

Les 3 parties du problème sont indépendantes

PARTIE A : Décomposition de rotations

- Détermination du centre de $f = r_1 \circ r_2$

Soient les rotations $r_1 = r_{\left(E, \frac{2\pi}{3}\right)}$ et $r_2 = r_{\left(D, \frac{2\pi}{3}\right)}$

La somme des angles de rotation est $\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}\ (2\pi)$

La composée $f = r_1 \circ r_2$ est donc une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$

Décomposons r_1 et r_2 en produit de réflexions

Soit $r_1 = s_{D_1} \circ s_{D_2}$ où s_{D1} et s_{D2} sont des réflexions d'axes (D_1) et (D_2) tels que

$$(D_1) \cap (D_2) = E \quad \text{et} \quad (D_2, D_1) = \frac{1}{2}\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

et $r_2 = s_{D_3} \circ s_{D_4}$ où s_{D_3} et s_{D_4} sont des réflexions d'axes (D_3) et (D_4) tels que

$$(D_3) \cap (D_4) = D \quad \text{et} \quad (D_4, D_3) = \frac{\pi}{3}$$

On impose aux axes la condition : $(D_2) = (D_3) = (ED)$ (droite passant par les centre de r_1 et de r_2)

Détermination de (D_1)

$$(D_1) \text{ passe } E \text{ et } ((ED), (D_1)) = \frac{\pi}{3}$$

Or, la droite (ET) passe par E et $((ED), (ET)) = \frac{\pi}{3}$ d'où $(D_1) = (ET)$

Détermination de (D_4) :

(D_4) passe par le point D et $((D_4), (DE)) = \frac{\pi}{3}$

Or, la droite (DT) passe par D et $((DE), (DT)) = -\frac{\pi}{3}$. D'où $(D_4) = (DT)$

Alors $f = r_1 \circ r_2 = \left(s_{(D_1)} \circ s_{(D_2)}\right) \circ \left(s_{(D_3)} \circ s_{(D_4)}\right)$

i.e $f = s_{ET} \circ s_{DE} \circ s_{DE} \circ s_{DT} = s_{ET} \circ s_{DT}$

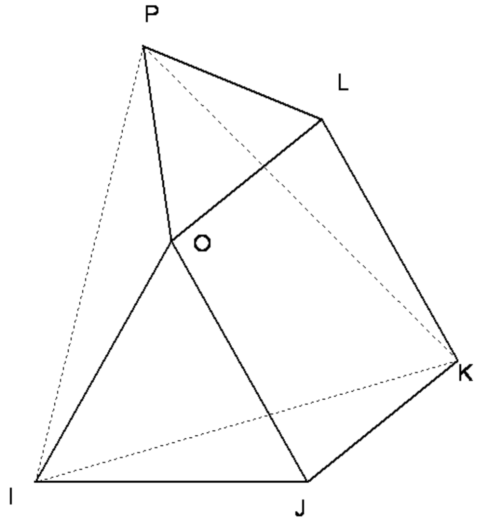
Ainsi, f est la composée de 2 réflexions d'axes sécants en $(ET) \cap (DT) = T$

(f est donc un déplacement)

D'où f est la rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$ et de centre T

PARTIE B : Composée d'une translation et d'une rotation

1 - Construction



2 - a) Nature de g = r o t

g est la composée d'une translation et d'une rotation, donc g est une rotation

b) Image de I et K par l'application g.

On a $r = r_{\left(0\,;\,\frac{\pi}{3}\right)}$ et $t = t_{\overrightarrow{JO}}$

Image de I :

Soit $I'' = g(I) = r \circ t(I) = r\left[t(I)\right]$

Posons $I' = t(I)$, on a $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{JO}$

Alors $I'' = r\left[t(I)\right] = r(I')$ i.e . $OI'' = OI'$ et $\left(\overrightarrow{OI'}, \overrightarrow{OI''}\right) = \frac{\pi}{3}$

Or $\left(\overrightarrow{OI'}, \overrightarrow{OI}\right) = \frac{\pi}{3}$ d'où $I'' = I$ donc $g(I) = I$

- Image de K :

Soit K'' = g(K) = r o t (K). Posons K' = t(K).

On a $\overrightarrow{KK'} = \overrightarrow{JO} \Rightarrow K' = L$

D'où $K'' = r\left[t(K)\right] = r(L) \Rightarrow OL = OK''$ et $\left(\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OK''}\right) = \frac{\pi}{3}$

Or OLP est équilatéral direct i.e. $OL = OP$ et $\left(\overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OP}\right) = \frac{\pi}{3}$

Donc $K'' = P$ d'où $g(K) = P$

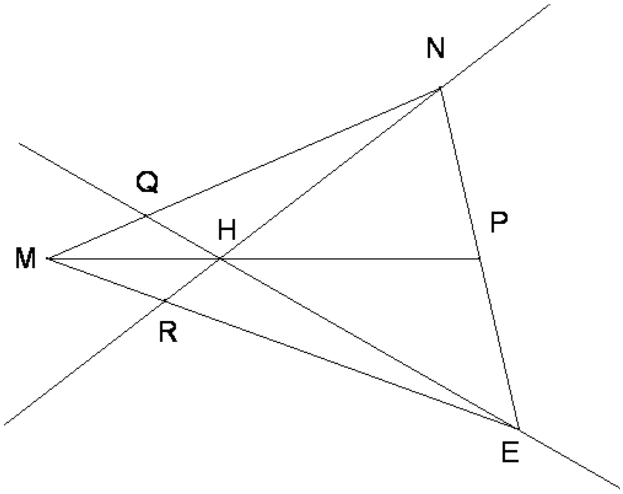
Conclusion : g est la rotation de centre I et l'angle $\frac{\pi}{3}$

Nature de triangle IKP

Comme $g(K) = L$, on a $IK = IP$ et $\left(\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IP}\right) = \frac{\pi}{3}$

D'où IKP est un triangle équilatéral direct.

Partie C : Calculs barycentriques



(I) - H est le barycentre de { (M,3) ; (E,1) ; (N,1) } . On a, $3\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HN}=\vec{0}$

Q est le barycentre de { (M,3) ; (N,1) } . On a, $3\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{QN}=\vec{0}$

R est le barycentre de { (M,3) ; (E,1) } . On a, $3\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{RE}=\vec{0}$

1- Démontrons que (EQ) passe par H

i.e. E, Q et H sont alignés

On a $3\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HN}=\vec{0}$

Ou $3(\overrightarrow{HQ}+\overrightarrow{QM})+\overrightarrow{HE}+(\overrightarrow{HQ}+\overrightarrow{QN})=\vec{0}$

Comme $3\overrightarrow{QM}+\overrightarrow{QN}=\vec{0}$

Alors $3\ \overrightarrow{HQ}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HQ}=\vec{0}$ i.e. $\overrightarrow{HE}=-4\overrightarrow{HQ}$

Conclusion : E, Q et H sont alignés.

Démontrons que (NR) passe par H

i.e. N, R et H sont alignés

On a $3\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HN}=\vec{0}$

Ou $3(\overrightarrow{HR}+\overrightarrow{RM})+(\overrightarrow{HR}+\overrightarrow{RE})+\overrightarrow{HN}=\vec{0}$

Comme $3\overrightarrow{RM}+\overrightarrow{RE}=\vec{0}$

Alors $3\ \overrightarrow{HR}+\overrightarrow{HR}+\overrightarrow{HN}=\vec{0}$ i.e. $\overrightarrow{HN}=-4\overrightarrow{HR}$

Conclusion : R, N et H sont alignés.

2 – a) Montrons que M, P et H sont alignés

P est le milieu de [EN], $\overrightarrow{PE}+\overrightarrow{PN}=\vec{0}$

Alors $3\overrightarrow{HM}+\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{HN}=\vec{0}$ implique $3\overrightarrow{HM}+(\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{PE})+(\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{PN})=\vec{0}$

D'où $3\overrightarrow{HM}+2\overrightarrow{HP}=\vec{0}$. M, P et H sont alignés.

On a $3\ (\overrightarrow{HP}+\overrightarrow{PM})+2\overrightarrow{HP}=\vec{0}$

D'où $\overrightarrow{PH}=\frac{3}{5}\overrightarrow{PM}$

(II) - 1 – Détermination du barycentre G du système S = { (A,4) ; (B,-1) ; (C,-1) }.

On a $4\,\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

Soit F le milieu de [BC], on a $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\,\overrightarrow{GF}$

Alors $4\,\overrightarrow{GA} - 2\,\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

i.e. $2\,\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GF} = \vec{0}$ ou $2\,\overrightarrow{GA} - (\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AF}\,) = \vec{0}$

d'où $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AF} = \vec{0}$

A est le milieu de [GF]

Construction de G (voir figure ci-dessous)

2 – Détermination de l'ensemble (E) : $4\,\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 2\,a^2$

Soit φ la fonction scalaire du système S : $\varphi(\,M\,) = 4\,\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2$

On a $\varphi(M) = 2\,\overrightarrow{MG}^2 + (\,4\,\overrightarrow{GA}^2 - \overrightarrow{GB}^2 - \overrightarrow{GC}^2\,)$

Alors $4\,\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 - \overrightarrow{MC}^2 = 2\,a^2$ *équivaut à*

$$\overrightarrow{MG}^2 = \tfrac{1}{2}[\,2\,a^2 - (\,4\,\overrightarrow{GA}^2 - \overrightarrow{GB}^2 - \overrightarrow{GC}^2\,)]$$

Si (E) n'est pas vide ou réduit à {G}, alors (E) est un cercle de centre G.

On a $\varphi(\,C\,) = 4\,\overrightarrow{CA}^2 - \overrightarrow{CB}^2 - \overrightarrow{CC}^2 = 4\,a^2 - (a\sqrt{2})^2 = 2\,a^2$

Ainsi $C \in$ (E)

(E) est le cercle de centre G passant par C.