Série C - session 2011 : problème 2 – corrigé

Partie A : Etude de la fonction f définie par : $f(x) = e^{\frac{x}{2}} - x - 1$

1- Calcul de $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty$

En posant $X = \frac{x}{2}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} X(\frac{e^X}{X} - 2 - \frac{1}{X})$.

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} - 2 - \frac{1}{X} = +\infty$,

donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2.- a) Les variations de f.

Dérivée de f

On a $f'(x) = \dfrac{e^{\frac{x}{2}} - 2}{2}$

f ' (x) s'annule lorsque $e^{\frac{x}{2}} - 2 = 0$, c'est-à-dire x = 2ln2

x	$-\infty$		$2\ln 2$		$+\infty$
f '(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	$1 - 2\ln 2$	↗	$+\infty$

b) Asymptote oblique

On a $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) + x + 1) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{x}{2}} = 0$.

Donc la droite d'équation y=-x-1 est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $-\infty$.

c) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet pour solutions 0 et α dans IR **et** $2 < \alpha < 3$.

f(0) = 0 donc 0 est une solution de l'équation f(x)=0

f est continue et strictement croissante sur $]2\ln 2 ; +\infty[$, donc c'est une bijection de $]2\ln 2 ; +\infty[$ sur $f(]2\ln 2 ; +\infty[) =]1 - 2\ln 2 , +\infty[$.

Comme $0 \in]1 - 2\ln 2 , +\infty[$, il existe un réel unique α dans $]2\ln 2 ; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$

On a $f(3) \approx 0{,}48$ et $f(2) \approx -0{,}3$, donc $2 < \alpha < 3$

3 - Courbe représentative (unité graphique : 2 cm)

4.- a) Calcul de l'aire A(λ)

Unité d'aire : $\| \vec{i} \| \times \| \vec{j} \| = 2\,\text{cm} \times 2\,\text{cm} = 4\,\text{cm}^2$

On a $$A(\lambda) = \left| \int_{\lambda}^{-1} [f(x) - (-x-1)]dx \right| .4\,cm^2$$

$$= \left| \int_{\lambda}^{-1} e^{\frac{x}{2}} dx \right| 4cm^2 = \left[2e^{\frac{x}{2}} \right]_{\lambda}^{-1} 4cm^2$$

Alors $$A(\lambda) = 8\left[e^{-\frac{1}{2}} - e^{\frac{\lambda}{2}} \right] cm^2$$

b) Calcul de $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} A(\lambda)$

On a $$\lim_{\lambda \to -\infty} A(\lambda) = 8e^{-\frac{1}{2}}\ cm^2.$$

Partie B : Etude d'une suite

1 - Variations de la fonction g définie par g(x) = 2 ln (x + 1).

On a $$g'(x) = \frac{2}{x+1}$$

Les limites de g sont : $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

x	-1		+∞
g '(x)	‖	+	
g(x)	‖ -∞	↗	+∞

2 – Montrons que α est solution de l'équation g(x) = x.

On a $f(\alpha) = 0$ donc $e^{\frac{\alpha}{2}} - \alpha - 1 = 0$

C'est-à-dire $\alpha = 2\ln(\alpha + 1)$

D'où α est solution de l'équation $g(x) = x$.

3 - Montrons que pour tout x $\in [2;+\infty[$, $g(x) \in]2;+\infty[$

g est strictement croissante, donc pour tout $x \geq 2$, $g(x) \geq g(2)$ et $g(2) = 2\ln 3 > 2$.

Par conséquent, $g(x) \in]2;+\infty[$.

4 - a) Démontrons que pour tout $x \in [2;+\infty[$**, on a** $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$

Pour tout $x \geq 2$, $x + 1 \geq 3$, donc $0 < \frac{2}{x+1} \leq \frac{2}{3}$. Ainsi $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$ pour tout $x \in [2\ ;+\infty[$

b) Démontrons que pour tout $n \in IN$**, on a** $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|U_n - \alpha|$ **et que** $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

On a $|g'(x)| \leq \frac{2}{3}$ pour tout $x \in [2\ ;+\infty[$ donc quels que soient a et b de $[2\ ;+\infty[$, on a :

$|g(b) - g(a)| \leq \frac{2}{3}|b - a|$. (d'après le théorème des inégalités des accroissements finis)

Pour tout n de IN, $u_n \in [2;+\infty[$ et $\alpha \in [2;+\infty[$ donc $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$

Comme $g(u_n) = u_{n+1}$ et $g(\alpha) = \alpha$ on a : $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$.

On a donc :

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_{n-1} - \alpha|$$

$$|u_{n-1} - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_{n-2} - \alpha|$$

.....

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{2}{3}|u_0 - \alpha|$$

Par multiplication membre à membre on a, après simplification :

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

Comme $|u_0 - \alpha| = |3 - \alpha|$ et $2 < \alpha < 3$, donc $|3 - \alpha| < |3 - 2|$. Ainsi $|u_0 - \alpha| \leq 1$

D'où $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ pour tout entier naturel n.

Remarque : On peut aussi procéder par récurrence pour démontrer cette inégalité.

c) Montrons que la suite (U_n) converge vers un réel l

$0 \leq \frac{2}{3} \leq 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty}|\ u_n - \alpha\ | \leq \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$

Donc (u_n) converge vers α.

d) Déterminons p $\in$IN tel que, pour tout n$\in$IN, n ≥ p, on ait $|U_n - \alpha| \leq 10^{-4}$

On a $|\ u_n - \alpha\ | \leq 10^{-4}$ dès que $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-4}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-4}$ lorsque $n\ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln(10^{-4})$

C'est-à-dire $n \geq \dfrac{-4\ln 10}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} = 22{,}7$.

Donc, à partir de p =23, on a $|\ U_p - \alpha\ | \leq 10^{-4}$.

Courbe représentative