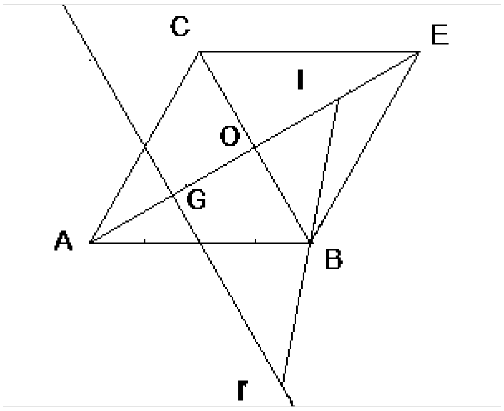
Série C - session 2011 : problème 1 – corrigé

Partie A : Utilisation des propriétés géométriques des transformations

1- Construction (AB = AC = BC = 4 cm)



2.- a) Barycentre du système $J=\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$

On a $2+1+1\neq 1$ donc le système admet un barycentre G tel que $2\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Quel que soit le point M, $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$

Pour M=O , $2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=4\overrightarrow{OG}$

Comme $\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OC}$ alors $2\overrightarrow{OA}=4\overrightarrow{OG}$, d'où $\overrightarrow{OA}=2\overrightarrow{OG}$

Ainsi, G est le milieu du segment $[OA]$.

b) Montrons que le vecteur $-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ **est un vecteur indépendant du point M**

Posons $\overrightarrow{V(M)}=-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$

Donc, pour un point N : $\overrightarrow{V(N)}=-2\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC}$

$\overrightarrow{V(M)}-\overrightarrow{V(N)}=(-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})-(-2\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{NC})=-2\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MN}=\vec{0}$.

Donc $-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}$ est un vecteur constant.

On a : $\overrightarrow{V(O)}=-2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=-2\overrightarrow{OA}=-4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AE}$

Ainsi $-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{AE}$ quel que soit le point M.

c) Ensemble (D) des points M tels que $(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$.

L'équation $(-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})(2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})=0$

Équivaut à $(-4\overrightarrow{OG})\ (4\overrightarrow{MG})=0$

Soit $\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{OG}=0$

(D) est la droite passant par G et perpendiculaire à (OG) ; c'est la médiatrice de $[AO]$

3- a) Montrons que le triangle IAI' est un triangle équilatéral de sens direct.

S est la similitude de centre B, de rapport $k=\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\theta=\frac{\pi}{3}$.

S(I)=I, S(A)=B, donc $\dfrac{IB}{IA}=\dfrac{1}{2}$ et $(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB})=\dfrac{\pi}{3}$

I' est l'image de I par la symétrie centrale de centre B, donc I, B et I' sont alignés et $\overrightarrow{IB}$ et $\overrightarrow{II'}$ sont de même sens. Comme $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{3}$ donc $(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{II'}) = \frac{\pi}{3}$

On a IA =2 IB = I I'. Ainsi, IAI' est équilatéral.

b) Montrons que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{6}$

(AB) est la médiatrice de $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AI'}) = \frac{\pi}{3}$. Donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{6}$.

Partie B : Utilisation des nombres complexes

1- a) Affixes z_A et z_B de A et B

On a $z_A = 0$ et $z_B = 4$

b) Module et un argument de l'affixe z_C de C

On a $\| z_C \| = AC = 4$ et $\arg z_C = (\overline{AB}; \overline{AC}) = \frac{\pi}{3}$.

Donc $z_C = 4e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 + 2i\sqrt{3}$

c) Calcul de l'affixe z_O de O.

O est le milieu de [BC], alors $z_O = \frac{z_B + z_C}{2} = \frac{4+(2+2i\sqrt{3})}{2}$

D'où $z_O = 3 + i\sqrt{3}$

2- a) Expression complexe de la similitude directe S

L'écriture complexe de S est de la forme : rapport $z' = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z + b$ où $b \in C$.

S(A) = B implique $z_B = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}z_A + b$. C'est-à-dire $4 = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}0 + b$

D'où $z' = \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3})z + 4$.

b) Affixe z_I du centre I de S.

Pour une similitude directe d'écriture complexe z ' = az + b, l'affixe du centre I est $z_I = \frac{b}{1-a}$.

On a $z_I = \frac{4}{1 - \frac{1}{4}(1 + i\sqrt{3})} = 4 + \frac{4}{3}i\sqrt{3}$

c) Vérifions que $\frac{z_I}{z_O}$ est un nombre réel et que $\frac{z_B - z_I}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur.

On a $\frac{z_I}{z_O} = \frac{4 + \frac{4}{3}i\sqrt{3}}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{4}{3}$, $\frac{z_I}{z_O}$ est un réel

Et $\frac{z_B - z_I}{z_B - z_A} = \frac{4 - (4 + \frac{4}{3}i\sqrt{3})}{4} = -\frac{1}{3}i\sqrt{3}$, $\frac{z_B - z_I}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur.

d) Interprétation

$\frac{z_I}{z_O}$ est un réel, donc $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AI}) = 0$. Il s'ensuit que I, O et A sont alignés

$\frac{z_B - z_I}{z_B - z_A} = -\frac{1}{3}i\sqrt{3}$ donc $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IB}) = -\frac{\pi}{2}$, alors (IB) et (AB) sont perpendiculaires