Série C - session 2007 : exercice partie A – corrigé

I – Arithmétique

1 - Montrons que $9^n - 2^n$ est divisible par 7 pour tout $n \in IN^*$

Posons $A_n = 9^n - 2^n$

Pour n = 1, $A_1 = 9 - 2 = 7$, c'est divisible par 7

Supposons que A_n soit divisible par 7

On a $A_{n+1} = 9^{n+1} - 2^{n+1} = 9^n.9^1 - 2^n.2^1$

$A_{n+1} = 9^n.(2 + 7) - 2^n.2^1 = 2\,(9^n - 2^n) + 7.9^n$.

$A_{n+1} = 2\,A_n + 7.9^n$.

Comme A_n est divisible par 7 (hypothèse de récurrence) et 7.9^n est aussi divisible par 7,

alors $A_{n+1} = 2\,A_n + 7.9^n$ est divisible par 7.

2- Montrons que A = 3n – 2 et B = 5n – 3 sont premiers entre eux

Rappel : soit d un diviseur commun à A et B, alors pour tous entiers x et y, d divise Ax + By

Donc d divise 3B – 5A

On a 3B – 5A = 3 (5n – 3) – 5 (3n – 2) = 1

D'où d divise 1, alors A = 3n – 2 et B = 5n – 3 sont premiers entre eux.

3- a) Vérifions que $\dot{5}$ est une solution de l'équation (E) dans Z / 7Z.

On a $\dot{5}^2 - \dot{5} + \dot{1} = \dot{4} - \dot{5} + \dot{1} = \dot{0}$, $\dot{5}$ est une solution (E).

b) Démontrer que l'équation (E) est équivalente à $(x - \dot{4})^2 = \dot{1}$

On a $(x - \dot{4})^2 = \dot{1}$ ssi $x^2 - \dot{8}x + \dot{16} = \dot{1}$

c'est-à-dire $x^2 - x + \dot{2} = \dot{1}$ ou encore $x^2 - x + \dot{1} = \dot{0}$

d'où (E) est équivalente à $(x - \dot{4})^2 = \dot{1}$

c) Résolution de $x^2 - x + \dot{1} = \dot{0}$ telle que | x | <7

x	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{2}$	$\dot{3}$	$\dot{4}$	$\dot{5}$	$\dot{6}$
$(x - \dot{4})^2$	$\dot{2}$	$\dot{2}$	$\dot{4}$	$\dot{1}$	$\dot{0}$	$\dot{1}$	$\dot{4}$

Les solutions sont le entiers x = 3 + 7k ou x = 5 + 7k' (k et k ' entiers)

x = 3 + 7k pour k = - 1, x = - 4 et pour k = 0, x = 3

x = 5 + 7k pour k = - 1, x = - 2 et pour k = 0, x = 5

d'où l'ensemble S = { - 4 ; - 2 ; 3 ; 5 }