Série C - session 2008 : exercice partie B – corrigé

B – Arithmétique

1 – Démontrons que $A = 9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11 pour tout n de $\mathbb{N}$

a) Utilisation des congruences

On a $2^6 = 64 \equiv 9\ [11]$ alors $2^{6n} \equiv 9^n\ [11]$

Ensuite $A = 9^{n+1} + 2^{6n+1} = 9 \cdot 9^n + 2 \cdot 2^{6n}$

Ce qui implique $A = 9 \cdot 9^n + 2 \cdot 2^{6n} \equiv 9 \cdot 9^n + 2 \cdot 9^n\ [11]$

C'est-à-dire $A \equiv (9 + 2) \cdot 9^n\ [11]$

$A \equiv 11 \cdot 9^n\ [11]$

D'où A est divisible par 11.

b) Raisonnement par récurrence

Pour n =0, $A = 9 + 2 = 11$, c'est divisible par 11.

Supposons que pour un certain rang n (n >1), A soit divisible par 11, alors,

pour le rang (n+1) $A = 9^{n+2} + 2^{6(n+1)+1} = 9 \cdot 9^{n+1} + 2^6 \cdot 2^{6n+1}$.

$A = 9 \cdot 9^{n+1} + 64 \cdot 2^{6n+1} = 9 \cdot 9^{n+1} + (9 + 55) \cdot 2^{6n+1}$

$A = 9 \cdot 9^{n+1} + (9 + 55) \cdot 2^{6n+1} = 9 \cdot (9^{n+1} + 2^{6n+1}) + 55 \cdot 2^{6n+1}$.

Or $(9^{n+1} + 2^{6n+1})$ est divisible par 11, (d'après l'hypothèse de récurrence)

Et $55 \cdot 2^{6n+1} = 5 \cdot 11 \cdot 2^{6n+1}$ est divisible par 11.

Donc c'est vraie pour n+1.

Conclusion : pour tout n de $\mathbb{N}$, $A = 9^{n+1} + 2^{6n+1}$ est divisible par 11

2 – Dans Z/5Z, on a

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{3}x$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$

On a $3x \equiv 2\ [5]$ pour $x = 5k + 4$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions vérifiant $|x| < 10$ est $S = \{-6\ ;\ -1\ ;\ 0\ ;\ 9\}$