Série C - session 2011 : exercice partie B – corrigé

Arithmétique

1 -a) Conversion dans la base 10 l'entier a écrit dans la base 2

$(\overline{1011101})_2 = 1\times 2^6 + 0\times 2^5 + 1\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 0\times 2^1 + 1\times 2^0 = 93$

b) Conversion dans la base 2 l'entier a écrit dans la base 10

On développe 54 suivant les puissances successives de 2

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ 54 & 0 \uparrow \\ 27 & 1 \\ 13 & 1 \\ 6 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{array}$$

Alors $54 = (\overline{110110})_2$

2 -a) la table d'addition et de multiplication de Z/5Z.

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$
$\bar{3}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$
$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{4}$	$\bar{1}$	$\bar{3}$
$\bar{3}$	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$	$\bar{2}$
$\bar{4}$	$\bar{0}$	$\bar{4}$	$\bar{3}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

b) Résolution dans Z/5Z X Z/5Z du système

$$\begin{cases} \bar{3}x + \bar{2}y = \bar{1} & (1) \\ \bar{2}x + \bar{4}y = \bar{3} & (2) \end{cases}$$

Dans Z/5Z, l'élément inverse de $\bar{3}$ est $\bar{2}$. Multiplions l'équation (1) par $\bar{2}$.

Nous obtenons $\bar{2}\,(\bar{3}x + \bar{2}y) = \bar{2}$

C'est-à-dire $\bar{6}x + \bar{4}y = \bar{2}$ ou encore $x + \bar{4}y = \bar{2}$

Donc $x = \bar{2} - \bar{4}y$

Alors l'équation (2) donne : $\bar{2}\,(\bar{2} - \bar{4}y) + \bar{4}y = \bar{3}$

C'est-à-dire $\bar{4} - \bar{4}y = \bar{3}$ ou encore $\bar{4}y = \bar{1}$

D'après la table de multiplication $y = \bar{4}$

Alors $x = \bar{2} - \bar{4}y = \bar{2} - \bar{4}.\bar{4} = \bar{2} - \bar{1} = \bar{1}$

donc $S = \left\{(\bar{1}\ ;\ \bar{4})\right\}$

c) Résolution de l'équation : $x^2 - x - \overline{2} = \overline{0}$ **dans Z/5Z**

L'équation $x^2 - x - \overline{2} = \overline{0}$ équivaut à $x^2 = x + \overline{2}$

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$
x^2	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{1}$
$x+\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$

Donc $x = \overline{2}$ ou $x = \overline{4}$

L'ensemble des solutions est $S = \left\{\overline{2}\ ;\ \overline{4}\right\}$