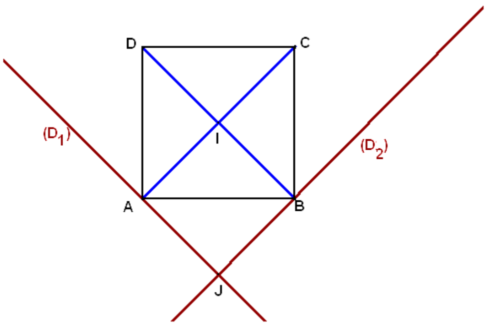
Série C – session 2013 : problème 1 – corrigé

Partie A

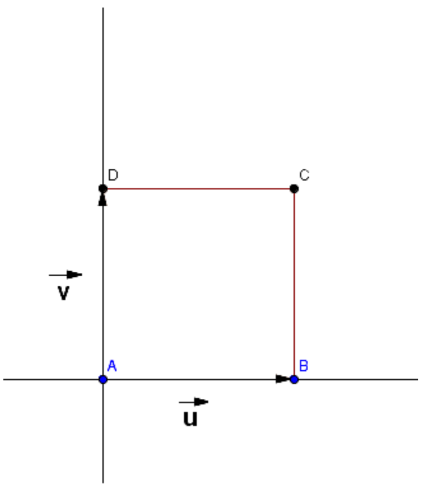
1.-



$$r_B \circ r_A = \left(S_{(D_2)} \circ S_{(AB)}\right) \circ \left(S_{(AB)} \circ S_{(D_1)}\right)$$
$$= S_{(D_2)} \circ (S_{(AB)} \circ S_{(AB)}) \circ S_{(D_1)}$$
$$= S_{(D_2)} \circ id \circ S_{(D_1)}$$
$$= S_{(D_2)} \circ S_{(D_1)}$$

$r_B \circ r_A = r_{J,\pi}$ où J est le symétrique de I par rapport à (AB)

2.- a)



$z_A = 0,\ z_B = 1,\ z_D = i\ et\ z_C = 1+i$

$$a = \frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{0-1-i}{1-1-i} = 1-i$$

b) La similitude plane directe de centre C qui transforme B en A est la similitude de centre C, de rapport |a| et d'angle arg a.

$S_{(AD)}$ $|a| = |1-i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$$a = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})\right)$$

Ainsi $\arg a = -\frac{\pi}{4}$

Alors la similitude est de centre C, de rapport $k = \sqrt{2}$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{4}$

3.- a) $f = S_{(AD)} \circ r_A \circ t_{\overrightarrow{AC}}$

$S_{(AD)}$ est un antidéplacement, r_A *et* $t_{\overrightarrow{AC}}$ sont des déplacements donc f est un antidéplacement.

b) $f = S_{(AD)} \circ r_A \circ t_{\overrightarrow{AC}} = S_{(AD)} \circ (S_{(AD)} \circ S_{(AC)}) \circ t_{\overrightarrow{AC}}$

$$= (S_{(AD)} \circ S_{(AD)}) \circ S_{AC} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$$
$$= S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$$

Donc f est une symétrie glissée d'axe (AC) et de vecteur $\overrightarrow{AC}$

c) Expression complexe de $t_{\overrightarrow{AC}}$:

$z' = z + z_C - z_A$

$z' = z + 1 + i$

Expression complexe de $S_{(AC)}$

$\begin{cases} z_A = a\overline{z_A} + b \\ z_C = a\overline{z_C} + b \end{cases}$ Ce qui donne a = i et b = 0.

Ainsi $z' = i\overline{z}$

Expression complexe de f

$z' = i\overline{z} + 1 + i$

Partie B

1.- (E_θ) : $t^2 - 2t\cos\theta + 1 = 0$

$\Delta' = -\sin^2\theta = (i\sin\theta)^2$

$t' = \cos\theta + i\sin\theta \;\; et \;\; t'' = \cos\theta - i\sin\theta$

(E'_θ) : $t^4 - 2t^2\cos\theta + 1 = 0$.

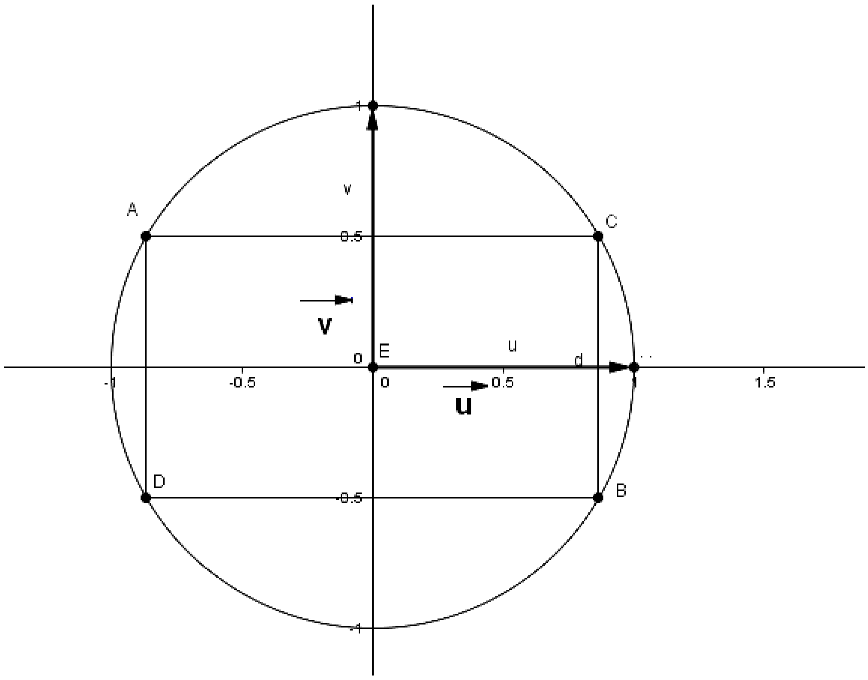
Il suffit de poser $t = z^2$. On a alors : $z^2 = \cos\theta + i\sin\theta \;\; ou \;\; z^2 = \cos\theta - i\sin\theta$

Si $z^2 = \cos\theta + i\sin\theta = [1, \theta + 2k\pi]$, les solutions sont $z_0 = \left[1, \frac{\theta}{2}\right]$ *et* $z_1 = \left[1, \frac{\theta}{2} + \pi\right]$

Si $z^2 = \cos\theta - i\sin\theta = [1, -\theta + 2k\pi]$, les solutions sont $z'_0 = \left[1, -\frac{\theta}{2}\right]$ *et* $z'_1 = \left[1, -\frac{\theta}{2} + \pi\right]$

2.- Si $\theta = \frac{\pi}{3}$, $z_0 = \left[1; \frac{\pi}{6}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = z_C$; $z_1 = \left[1; \frac{7\pi}{6}\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = z_D$

$$z'_0 = \left[1; -\frac{\pi}{6}\right] = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = z_B \quad et\; z'_1 = \left[1; \frac{5\pi}{6}\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = z_A$$



3.- A,B, C et D sont les sommets d'un carré si $\theta = \frac{\pi}{2}$

4.- G_λ est le barycentre de $S_\lambda = \{(A; \lambda^2+1); (B;\lambda); (D;-\lambda)\}$

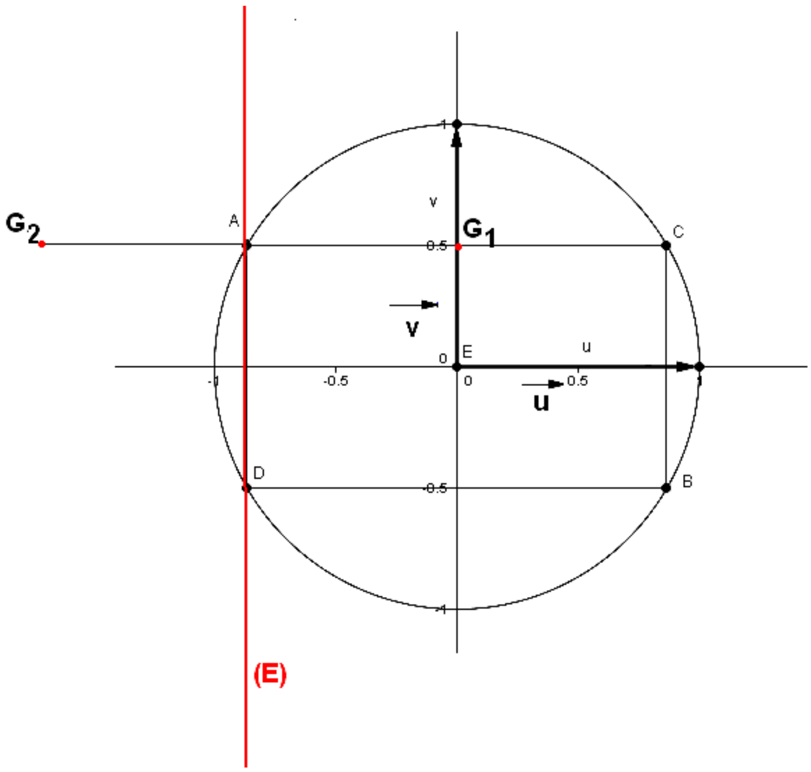
a) $\overrightarrow{AG_\lambda} = \frac{-\lambda}{\lambda^2+1}\overrightarrow{BD}$

b) $(E) = \left\{M \in P \text{ tel que } \left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right\|\right\}$

$\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}\right\|$ équivaut à $\left\|\overrightarrow{MG_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{MG_2}\right\|$ où G_1 et G_2 sont les barycentres respectifs de $S_1 = \{(A;2); (B;1); (D;-1)\}$ et $S_\lambda = \{(A;2); (B;-1); (D;1)\}$ correspondant à $\lambda = 1 \; et\; \lambda = -1$.

(E) est donc la médiatrice du segment [G_1G_2]

$\overrightarrow{AG_1} = \frac{-1}{2}\overrightarrow{BD} \quad et \quad \overrightarrow{AG_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$


G2
A
C
G1
0.5
v
V
0
E
u
-1
-0.5
0
0.5
1
U
D
B
-0.5
-1
(E)