Série C – session 2013 : problème 2 – corrigé

Partie A

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 - 2\ln x & si\ x \in \left]0;1\right[\\ f(x) = (3x-3)e^{-x} & si\ x \geq 1 \end{cases}$$

1.-a) Continuité de f en 1

$f(1) = (3.1-3)e^{-1} = 0$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-}(x^2 - 1 - 2\ln x) = 1 - 1 - 2.0 = 0$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+}(3x-3)e^{-x} = (3.1-3)e^{-1} = 0$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = 0 = f(1)$, donc f est continue en 1.

b) Dérivabilité de f en 1

A gauche : $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-1-2\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}(x+1-2\dfrac{\ln x}{x-1})$

En posant x-1 = X, on a x = X+1, si x tend vers 1, X tend vers 0, et $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{X\to0}\dfrac{\ln(X+1)}{X} = 1$.

Alors $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = 1+1-2.1 = 0$

A droite $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{(3x-3)e^{-x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to1^-}(\dfrac{3(x-1)}{x-1}e^{-x} = 3e^{-1}$

$\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} \neq \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ donc f n'est pas dérivable en 1.

2.- a) Sens de variation de f.

- Pour x ∈]0 ;1[, $f(x) = x^2 - 1 - 2\ln x$, $f'(x) = 2x - 2.\dfrac{1}{x} = \dfrac{2(x-1)(x+1)}{x}$

Pour x ∈]0 ;1[, (x-1)<0 , x>0 et (x+1) >0, donc f '(x)< 0 sur cet intervalle

- $si\ x \geq 1,\ f(x) = (3x-3)e^{-x},\ f'(x) = 3e^{-x} - (3x-3)e^{-x} = (-3x+6)e^{-x}$

  Sur cet intervalle, $e^{-x} > 0$ donc f '(x) est du signe de (-3x+6)

  $-3x+6 = 0\ si\ et\ seulement\ si\ x = 2.$

  $-3x+6 \geq 0\ \ si\ x \leq 2$

  $-3x+6 \leq 0\ si\ x \geq 2$

Donc f est croissante sur [1 ; 2] et décroissante sur $\left[2;+\infty\right[$

b) Tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	||	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$3e^{-2}$	↘	0

3.- a) Pour x ∈]0 ;1[, $f''(x) = 2 + \dfrac{2}{x^2} > 0$ donc la courbe n'admet aucun point d'inflexion sur cet intervalle.

Pour $x \geq 1$, $f''(x) = (3x-9)e^{-x}$.

x	1		3		$+\infty$
3x-9		-	0	+	
e^{-x}		+		+	
f''(x)		-	0	+	

f'' s'annule et change de signe en 3. Comme $f(3) = (3.3-3)e^{-3} = 6e^{-3}$ la courbe admet comme point d'inflexion le point $I(3, 3e^{-3})$

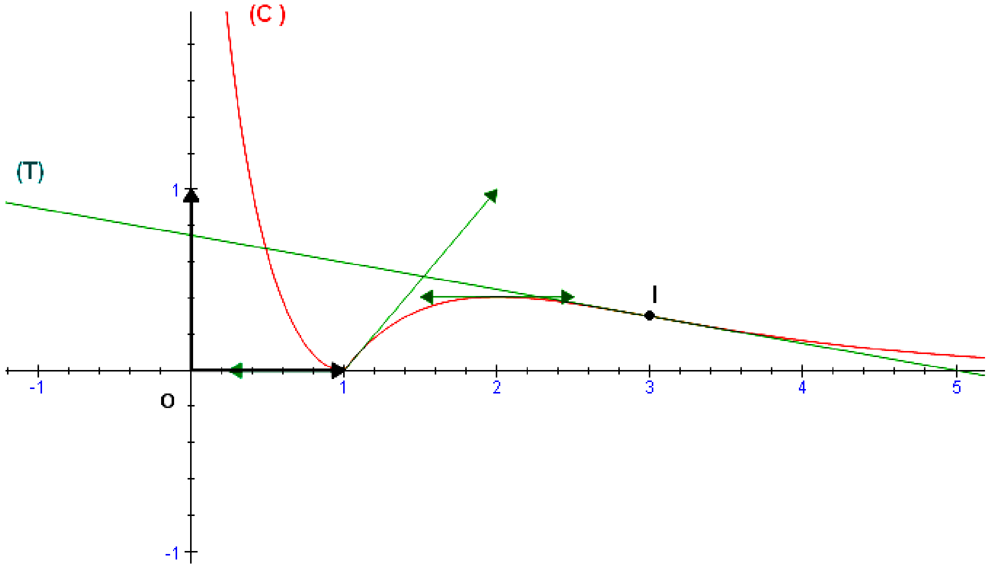
.

b) Equation de la tangente au point $I(3, 3e^{-3})$

L'équation de la tangente (T) au point I est $y = f'(3)(x-3) + f(3)$

$f'(3) = -3e^{-3}$ donc l'équation de (T) est $y = -3e^{-3}x + 15e^{-3}$

c) Courbe



Partie B

1.-a) $I(\lambda)=\int_{\lambda}^{1}f(x)dx=\int_{\lambda}^{1}(x^2-1-2\ln x)dx$

Calculons $\int_{\lambda}^{1}\ln x dx$

Posons u'(x) =1, et v(x) = lnx

$$\int_{\lambda}^{1}\ln x dx=[x\ln x]_{\lambda}^{1}-\int_{\lambda}^{1}x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=[x\ln x]_{\lambda}^{1}-[x]_{\lambda}^{1}$$

$$=[x\ln x-x]_{\lambda}^{1}$$

Et $I(\lambda)=\left[\frac{t^3}{3}-t-2(t\ln t-t)\right]$

$$=\left[\frac{t^3}{3}+t-2t\ln t\right]_{\lambda}^{1}$$

$$I(\lambda)=\frac{4}{3}-\frac{\lambda^3}{3}-\lambda+2\lambda\ln\lambda$$

b) $\lim_{\lambda\to 0}I(\lambda)=\frac{4}{3}$

2. -a) Montrons que $\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\cdot dt\le\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$

On a $\left[\frac{k}{n};\frac{k+1}{n}\right]\subset[0;1]$ et f est décroissante sur $[0;1]$,

donc $f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le f(t)\le f\left(\frac{k}{n}\right)$, pour tout t de $[0;1]$.

En intégrant entre $\frac{k}{n}$ *et* $\frac{k+1}{n}$, on a :

$$\left[t\cdot f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\cdot dt\le\left[t\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\right]_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}},$$

Et $\boxed{\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\cdot dt\le\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)}$

b) On a pour tout entier k, $1\le k\le n-1$

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\le\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}f(t)\cdot dt\le\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Donc :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\le\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}}f(t)\cdot dt\le\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{3}{n}\right) \leq \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(t)\cdot dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

…….

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{n}{n}\right) \leq \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(t)\cdot dt \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

Par addition membre à membre de ces n-1 inégalités, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\cdot dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Ou

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(t)\cdot dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\cdot dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

c) $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\cdot dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$

- D'une part $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\cdot dt$ **(1)**
  - $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\cdot dt = I(\frac{1}{n})$
  - $S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) + f(\frac{1}{n})$

Donc $\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = S_n - \frac{1}{n} f(\frac{1}{n})$

Ainsi $S_n - \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) \leq I(\frac{1}{n})$

Ou $S_n \leq I(\frac{1}{n}) + -\frac{1}{n} f(\frac{1}{n})$

- D'autre part

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)\cdot dt \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \textbf{(2)}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{1}{n} f(\frac{n}{n})$$

Or $f(\frac{n}{n}) = f(1) = 0$ d'où $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)= S_n$

Et **(2) s'écrit** $I(\frac{1}{n}) \leq S_n$

Alors $I(\frac{1}{n}) \leq S_n \leq I(\frac{1}{n}) + \frac{1}{n} f(\frac{1}{n})$

d) Calculons :

$\lim\limits_{t\to 0} tf(t) = \lim\limits_{t\to 0}\left(t^3 - t - 2t\ln t\right)$

$\lim\limits_{t\to 0} t\ln(t) = 0$

d'où $\lim\limits_{t\to 0} tf(t) = 0$

e) Ainsi on a : $\lim\limits_{n\to\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) \leq \lim\limits_{n\to\infty} S_n \leq \lim\limits_{n\to\infty}\left(I\left(\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

$\lim\limits_{\lambda\to 0} I(\lambda) \leq \lim\limits_{n\to\infty} S_n \leq \lim\limits_{\lambda\to 0}\left(I(\lambda) + \lambda f(\lambda)\right)$

$\frac{4}{3} \leq \lim\limits_{n\to\infty} S_n \leq \frac{4}{3}$.