Série C - session 2014 : exercice partie B – corrigé

Arithmétique

1 – Montrons que (x + 6 y)^2 – x^2 est divisible par 12.

On a $(x + 6y)^2 - x^2 = 12(xy + 3y^3)$, donc c'est divisible par 12.

Montrons que (x + 6 y)^4 – x^4 est divisible par 24.

$$(x+6y)^4 - x^4 = [(x+6y)^2 - x^2][(x+6y)^2 + x^2]$$
$$= [12(xy+3y^3)][2(x^2+6xy+18y^2]$$
$$= 24(xy+3y^3)(x^2+6xy+18y^2$$

Donc c'est divisible par 24

2 – Résolution dans Z de $3x \equiv 2[\bmod 7]$

On a $Z/7Z = \{\bar{0};\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{6}\}$

x	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$	$\bar{6}$
3 x	$\bar{0}$	$\bar{3}$	$\bar{6}$	$\bar{2}$	$\bar{5}$	$\bar{1}$	$\bar{4}$

D'où $x \in \bar{3}$, et la solution est x = 7k +3 (k∈Z).

3 – détermination de b

$(\overline{12})_b \times (\overline{22})_b = (\overline{314})_b$

Le symbole 4 figure dans l'équation, donc b > 4

On a $(\overline{12})_b = 1.b + 2$

$(\overline{22})_b = 2.b + 2$

$(\overline{314})_b = 3.b^2 + 1.b + 4$

Alors $(\overline{12})_b \times (\overline{22})_b = (\overline{314})_b$ équivaut à (b + 2) (2b + 2) = (3b^2 + b + 4)

2b^2 + 6b + 4 = 3b^2 + b + 4

b^2 – 5b =0 implique b = 0 ou b = 5

donc b = 5