Série C – session 2015 : problème 2 - corrigé

Partie A : Equations différentielles

1) Recherche du polynôme P

g est solution de (E) si $g'' + 2g' - 3g = P(x)$

on a : $g(x) = e^x + x + 1$

$g'(x) = e^x + 1$

$g''(x) = e^x$

alors $g'' + 2g' - 3g = (e^x) + 2(e^x + 1) - 3(e^x + x + 1) = -3x - 1$

d'où $P(x) = -3x - 1$

2) Résolution de (E') : $y'' + 2y' - 3y = 0$

L'équation caractéristique associée à (E') est $r^2 + 2r - 3 = 0$

Les racines de cette équation sont $r_1 = 1$ et $r_2 = -3$,

$y_1 = e^{r_1 x} = e^x$ et $y_2 = e^{r_2 x} = e^{-3x}$ sont des solutions particulières de (E')

La solution générale de (E') est $y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

3) Ensemble des solutions de (E)

La solution générale de (E) s'obtient en ajoutant à une solution particulière de (E) la solution générale de (E').

Alors $h = g + y$

$h(x) = e^x + x + 1 + C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$ où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

Détermination de la solution de (E) qui satisfait aux conditions h(0) = 1 et h'(0) = 5

On a $h(0) = 1$ donne $C_1 + C_2 = -1$

Et $h'(0) = 5$ donne $C_1 - 3C_2 = 3$

D'où $C_1 = 0$ et $C_2 = -1$, et la solution est $h(x) = e^x + x + 1 - e^{-3x}$

Partie B

I – 1) Etude de la continuité et de la dérivabilité de f en O

- f est continue en 0 si $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$

on a $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{x\ln x}{x+1} = 0$

alors f est continue en 0

- f est dérivable en 0 si $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ existe et est finie.

On a $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - 0}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x+1} = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable en 0

2. a) variations de $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = -\ln x - x - 1$

La dérivée de φ est $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{x} - 1$

Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $\varphi\,'(x) < 0$; alors φ est strictement décroissante sur $]0\ ;\ +\infty[$

b) Montrons que φ (x) = 0 admet une solution unique β

on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (-\ln x - x - 1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} (-\ln x - x - 1) = -\infty$

Comme φ est continue strictement croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$, c'est donc une bijection de $]0\ ;\ +\infty[$ dans $]-\infty\ ;\ +\infty[$,

Alors pour tout y_0 appartenant $]-\infty\ ;\ +\infty[$, il existe un unique x_0 de $]0\ ;\ +\infty[$ tel que $\varphi(x_0)=y_0$.

En particulier, pour $y_0 = 0$ il existe un unique β de $]0\ ;\ +\infty[$ tel que $\varphi(\beta) = 0$.

Vérifions que $\beta \in]\ 0,27\ ;\ 0,28\ [$

On a $\varphi(0,27) = 0,03$ et $\varphi(0,28) = -0,08$.

φ est continue, strictement décroissante [0,27 ; 0,28], $\varphi(0,27)\,.\,\varphi(0,28) = -0,0024 < 0$

Alors il existe un unique $\beta \in]\ 0,27\ ;\ 0,28\ [$ tel que $\varphi(\beta) = 0$.

Signe de φ suivant les valeurs de x

Le tableau de variation de φ est

x	0	β	$+\infty$
$\varphi\,'$		$-$	
φ	$+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

Pour $x \in]\ 0\ ;\ \beta\ [$, $\varphi(x) > 0$

Pour $x \in]\ \beta\ ;\ +\infty\ [$, $\varphi(x) < 0$

Montrons que f (β) = - β

On a $\varphi(\beta) = 0$, i.e. $-\ln\beta - \beta - 1 = 0$, d'où $\ln\beta = -\beta - 1$.

Alors $f(\beta) = \dfrac{\beta\ \ln\beta}{\beta+1} = \dfrac{\beta\ (-\beta-1)}{\beta+1}$, d'où $f(\beta) = -\beta$.

3) expression de f '(x) en fonction de φ (x)

Posons $u = x \ln x$ et $v = x + 1$

On a $u' = \ln x + 1$ et $v' = 1$

Alors $f'(x) = \dfrac{(\ln x + 1)\ (x+1) - x\ln x}{(x+1)^2} = \dfrac{\ln x + x + 1}{(x+1)^2}$

D'où $f'(x) = \dfrac{-\varphi(x)}{(x+1)^2}$

Signe de f'(x)

Comme $(x+1)^2 > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$, on a sg [f'(x)] = sg [$-\varphi(x)$]

D'où les variations de f

x	0		β		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\beta$	$\nearrow$	$+\infty$

4. a) position relative de (C) par rapport à (Γ)

Etude du signe de f(x) – ln x

On a $f(x) - \ln x = \dfrac{x\ln x}{x+1} - \ln x = -\dfrac{\ln x}{x+1}$

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - \ln x$		$+$	0	$+$	

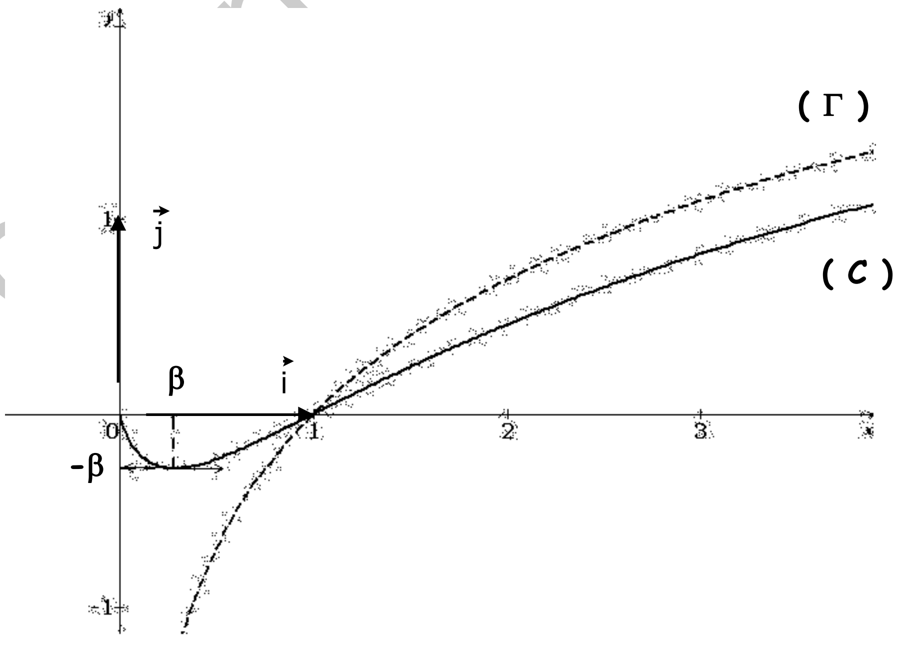
Pour $0 < x < 1$, (C) est au-dessus de (Γ)

Pour $x > 1$, (C) est au-dessous de (Γ)

Remarque : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \ln x \right] = 0$, (Γ) est une courbe asymptote pour (C).

b) représentation graphique

unité graphique : 4 cm



II – Etude de l'équation f (x) = n

1) Montrons que f (x) = n admet une solution unique

L'équation f (x) = n est l'équation aux abscisses des points d'intersection de (C) avec la famille de droites d'équation y = n.

Comme f est continue strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$, c'est donc une bijection de $]1\,;+\infty[$ dans $]0\,;+\infty[$,

Alors pour tout $n \in]0\,;+\infty[$, il existe un unique α_n de $]1\,;+\infty[$ tel que $f(\alpha_n) = n$.

2. a) Montrons que $f(e^n) \leq n$

On a $\quad f(e^n) = \dfrac{e^n \ln e^n}{e^n + 1} = \dfrac{e^n}{e^n+1} n$

Or $\quad \dfrac{e^n}{e^n+1} < 1$ alors $f(e^n) = \dfrac{e^n}{e^n+1} n \leq n$

Montrons que $\alpha_n \geq e^n$

On a $\quad f(\alpha_n) = n$ et $f(e^n) \leq n$ donc $f(e^n) \leq f(\alpha_n)$

Comme f est continue strictement croissante sur $]1\,;+\infty[$ (i.e. une bijection), on a $\alpha_n \geq e^n$.

b) montrons que la relation $f(\alpha_n) = n$ peut s'écrire sous la forme $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) = \dfrac{n}{\alpha_n}$

on a $\quad f(\alpha_n) = n$ i.e. $\dfrac{\alpha_n \ln \alpha_n}{\alpha_n + 1} = n$

$$\frac{\alpha_n}{\alpha_n+1}\ln\alpha_n = \ln e^n$$

$$\alpha_n \ln \alpha_n = (\alpha_n + 1)\ln e^n$$

$$\alpha_n (\ln \alpha_n - \ln e^n) = \ln e^n$$

$$\alpha_n \ln\frac{\alpha_n}{e^n} = \ln e^n$$

Alors $\ln\dfrac{\alpha_n}{e^n} = \dfrac{n}{\alpha_n}$

Limite de $\dfrac{\alpha_n}{e^n}$ lorsque n tend vers l'infini

On a $\quad \alpha_n \geq e^n$ ce qui implique $\dfrac{1}{\alpha_n} \leq \dfrac{1}{e^n}$ et $\dfrac{n}{\alpha_n} \leq \dfrac{n}{e^n}$

On a $\quad \dfrac{\alpha_n}{e^n} \geq 1$ ce qui implique $\ln\left(\dfrac{\alpha_n}{e^n}\right) \geq 0$

D'après $\quad \ln\dfrac{\alpha_n}{e^n} = \dfrac{n}{\alpha_n}$ et $\dfrac{n}{\alpha_n} \leq \dfrac{n}{e^n}$, on a $\ln\dfrac{\alpha_n}{e^n} \leq \dfrac{n}{e^n}$

Alors $\quad 0 \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\dfrac{\alpha_n}{e^n} \leq \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{n}{e^n}$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{n}{e^n} = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\frac{\alpha_n}{e^n} = 0$

Alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\alpha_n}{e^n} = 1$

3) Expression de $(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n)$ en fonction de n

On pose $\alpha_n = e^n(1+\varepsilon_n)$ i.e. $(1+\varepsilon_n) = \frac{\alpha_n}{e^n}$

Alors $(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n) = \frac{\alpha_n}{e^n} \ln\left(\frac{\alpha_n}{e^n}\right) = \frac{\alpha_n}{e^n}\frac{n}{\alpha_n}$

D'où $(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n) = \frac{n}{e^n} = n e^{-n}$

4. a) Variation de $U : t \mapsto U(t) = (1+t)\ln(1+t) - t$

Pour $t \geq 0$ on a $U'(t) = \ln(1+t)$

Pour $t \geq 0$, $U'(t) \geq 0$, donc U est strictement croissante.

Ainsi $U(t) \geq U(0) = 0$ pour $t \geq 0$ i.e. $(1+t)\ln(1+t) - t \geq 0$

Variation de $V : t \mapsto V(t) = (1+t)\ln(1+t) - t - \frac{t^2}{2}$

On a $V'(t) = \ln(1+t) - t$ et $V''(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t}$

Donc $V''(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$, d'où V ' est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$

Alors $V'(t) \leq V'(0) = 0$.

V ' (t) étant négative sur $]0 ; +\infty[$, V est décroissante ;

Alors pour $t \in]0 ; +\infty[$ $V(t) \leq V(0) = 0$

ou $(1+t)\ln(1+t) - t - \frac{t^2}{2} \leq 0$

Des inégalités $(1+t)\ln(1+t) - t \geq 0$ et $(1+t)\ln(1+t) - t - \frac{t^2}{2} \leq 0$, on déduit

$0 \leq (1+t)\ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}$

b) montrons que pour $n \geq 1$: $\varepsilon_n \leq n e^{-n} \leq \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}$

D'après 4. a) on a $0 \leq (1+t)\ln(1+t) - t \leq \frac{t^2}{2}$ ou $t \leq (1+t)\ln(1+t) \leq t + \frac{t^2}{2}$

En posant $t = \varepsilon_n$, on a $\varepsilon_n \leq (1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n) \leq \varepsilon_n + \frac{{\varepsilon_n}^2}{2}$

Or $(1+\varepsilon_n)\ln(1+\varepsilon_n) = n e^{-n}$ alors $\varepsilon_n \leq n e^{-n} \leq \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}$

Montrons que pour $n \geq 1$: $0 \leq n e^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n}$

D'après $\varepsilon_n \leq n e^{-n} \leq \varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2}{2}$, on a $0 \leq n e^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n^2}{2}$

De l'inégalité $0 \leq \varepsilon_n \leq n e^{-n}$ on a $\varepsilon_n{}^2 \leq n^2 e^{-2n}$, alors $0 \leq n e^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{\varepsilon_n^2}{2} \leq \frac{n^2 e^{-2n}}{2}$

d'où, pour $n \geq 1$: $0 \leq n e^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n}$

Calcul de $\lim_{x \to +\infty} (e^n + n - \alpha_n)$

D'après 3) $\alpha_n = e^n (1 + \varepsilon_n)$, i.e. $e^n - \alpha_n = -e^n \varepsilon_n$

En ajoutant n aux deux membres : $e^n + n - \alpha_n = n - e^n \varepsilon_n$

Ou encore $e^n + n - \alpha_n = e^n (n e^{-n} - \varepsilon_n)$

Comme $0 \leq n e^{-n} - \varepsilon_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-2n}$, on a $e^n + n - \alpha_n = e^n (n e^{-n} - \varepsilon_n) \leq e^n \frac{n^2}{2} e^{-2n}$

D'où $e^n + n - \alpha_n \leq \frac{n^2}{2} e^{-n}$

Alors $0 \leq \lim_{x \to +\infty} (e^n + n - \alpha_n) \leq \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} n^2 e^{-n} = 0$

Ainsi $\lim_{x \to +\infty} (e^n + n - \alpha_n) = 0$