DIVISION EUCLIDIENNE

1. MULTIPLES ET DIVISEURS D'UN ENTIER RELATIF

1.1 Définition

Un entier relatif a est un multiple d'un entier relatif b si et seulement s'il existe un entier relatif q tel que

a = bq.

On dit que b est un diviseur de a ou que b divise a.

On écrit b | a (b divise a).
ex : 35 est un multiple de 5 et 5 est un diviseur de 35

1.2 Propriétés

Ensembles des multiples d'un entier relatif
Soit a $\in$ Z, les multiples de a sont : -ka, -(k-1)a, ..., -a, 0, a, ... , ka, ... (k$\in$ IN).
On note aZ l'ensemble des multiples de a.
En particulier, l'ensemble des multiples de 0 est {0}.
l'ensemble des multiples de 1 est Z.

La relation "divise" est une relation d'ordre dans IN*

- elle est réflexive : pour tout a $\in$ IN*, a | a.

  - elle est antisymétrique : si a | a' et a' | a, alors a = a'.

  - elle est transitive : si a | a' et a' | a" alors a | a".

Remarque : La relation "divise" est une relation d'ordre partiel.
On n'a pas nécessairement a divise b ou b divise a.

Soit a, b, c $\in$ Z, si a divise b et b divise c alors a divise c.

Si b | a alors –b | a

Si a | b et b | a alors a = b où a= -b

Si c | a et c | b alors c divise (a+b), (a-b), ax+by pour tous entiers x, y

2. DIVISION EUCLIDIENNE

2.1 Théorème

Soit a $\in$ Z et b $\in$ IN*, il existe un entier relatif unique q et un entier naturel unique r tel que : a = bq + r

0 $\leq$ r $<$ b.

2.2 Définition

Soit $a \in Z$ et $b \in IN^*$. Effectuer la division euclidienne de a par b c'est déterminer q et r tels que $a = bq + r$ $0 \leq r < b$.

a est le dividende, b le diviseur, q le quotient et r le reste de la division euclidienne.

Remarques :

- Si $0 \leq a < b$, alors $q = 0$ et $r = a$.
- Si $r = 0$, a est un multiple de b et q le quotient exact de a par b.

Exemples : $65 . 22 < 1473 < 65 . 23$

$65 . (-23) < -1473 < 65 . (-22)$

2.3 Division de même reste

Soit a, a', $b \in Z$ tels que r est le reste commun dans la division euclidienne de a et a' par b.
On a $a = bq + r$ et $a' = bq' + r$ avec $0 \leq r < b$
Alors $a - a' = b(q - q')$, donc $a - a'$ est un multiple de b.
Réciproquement, si $a - a' = bm$ et $a' = bq' + r$ avec $0 \leq r < b$, alors $a = b(q' + m) + r$ $0 \leq r < b$, donc r est reste de la division de a par b.

Théorème

Soit a, a', $b \in Z$, a et a' ont le même reste dans la division euclidienne par b si et seulement si la différence $a-a'$ est un multiple de b.